Algèbre linéaire : notions importantes

1 Espaces vectoriels

1.1 Préliminaires

Déf.: **groupe** : ensemble G plus loi $*: G \times G \to G$ associative ($\forall x, y, z : x * (y * z) = (x * y) * z$), avec él. neutre ($\exists e, \forall x : e * x = x * e = x$) et symétrique ($\forall x, \exists \bar{x} : x * \bar{x} = \bar{x} * x = e$).

abélien = commutatif : $x * y = y * x$; notation additive : $* = +,\ e = 0,\ x * \bar{y} = x - y$.

Ex.: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot)$ groupes abéliens, $(\mathbb{N}, +)$ non.

Déf.: **groupe symétrique** $S(E)$ = **permutations** de E = bijections $E \to E$

Déf.: **corps** : groupe $(\mathbb{K}, +, 0)$ plus loi $\cdot$ distributive sur $+$ ($x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$), telle que $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ est un groupe ; corps **commutatif** si $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ abélien. $(\mathbb{K}^* \equiv \mathbb{K} \setminus \{0\})$

Convention : $a + b \cdot c \equiv a + (b \cdot c)$; neutre et symétrique pour $\cdot$ notés 1 et x^{-1}.

Ex.: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ corps commutatifs, $\mathbb{Z}$ non.

1.2 Espace vectoriel

Déf.: **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$–e.v.) : groupe $(E, +, o)$ avec $\star : \mathbb{K} \times E \to E$ t.q. $1 \star x = x$, $\lambda \star (\mu \star x) = (\lambda \cdot \mu) \star x$ et $\lambda \star (x + y) = \lambda \star x + \lambda \star y$, $(\lambda + \mu) \star x = \lambda \star x + \mu \star x$.

Ex.: Un corps $\mathbb{K}$ est L–e.v. pour tout sous-corps $L \subset \mathbb{K}$, par ex. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Prop.: $\mathbb{K}$, $E^I = \{f : I \to E\} = \left\{(f_i)_{i \in I}\right\}$ et $E^{(I)} = \left\{f \in E^I \mid \{i \in I \mid f_i \neq o\} \text{ fini}\right\}$ sont $\mathbb{K}$–e.v.

Ex.: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X] \simeq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, E^I, $\prod_{i \in I} E_i$ avec $+, \cdot$ par composante.

1.3 Sous-espace vectoriel

Déf.: $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$, $C \cdot A = \{\lambda \cdot a; \lambda \in C, a \in A\}$.

Déf.: **sous-espace vectoriel (s.e.v.)** : sous-ensemble $F \neq \emptyset$ d'un $\mathbb{K}$–e.v. E, t.q. $F + F \subset F, \mathbb{K} \cdot F \subset F$ (« stable pour + et $\cdot$ »).

Ex.: $\{o\}$, E sont s.e.v. de E ; tout autre s.e.v. est sous-espace **propre**.

Ex.: $\mathbb{K}_n[X]$ (polynômes de deg$\leq n$) est sev de $\mathbb{K}[X]$.

Prop.: F s.e.v. ssi $o \in F$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F : \lambda x + \mu y \in F$.

Ex.: $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\right\}$ est s.e.v., $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1\right\}$ non.

Prop.: $F \subset E$ est s.e.v. de $(E, +, \cdot)$ ssi $(F, +, \cdot)$ est espace vectoriel.

Ex.: La **droite vectorielle** engendrée par $a \in E$, $\mathbb{K} \cdot a = \{\lambda a; \lambda \in \mathbb{K}\}$, est s.e.v. de E.

Ex.: $\mathbb{R} \cdot (1 + i)$ est s.e.v. du $\mathbb{R}$–e.v. $\mathbb{C}$; $\mathbb{K}_n[X]$ (polynômes de deg$\leq n$) est sev de $\mathbb{K}[X]$.

Ex.: Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites réelles), $C = \{(x_n) \mid \lim x_n \in \mathbb{R}\}$, $C_0 = \{(x_n) \mid \lim x_n = 0\}$, $S = \{(x_n) \mid \forall n > N, x_n = x_N\}$ sont des s.e.v.

1.4 Somme de s.e.v.

Déf.: **somme des s.e.v.** F, G : $F + G = \{x + y;\ x \in F, y \in G\}$.

Prop.: Si F et G sont s.e.v. du $\mathbb{K}$–ev E, alors $F + G$ est s.e.v. de E.

Ex.: $\mathbb{R} \cdot (1, 0) + \mathbb{R} \cdot (1, 1) = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i = \mathbb{C}$.

Cor.: Si $F_1, ..., F_n$ s.e.v. de E, alors $\sum_{i=1}^n F_i \equiv F_1 + \cdots + F_n$ est s.e.v. de E

1.5 Combinaisons linéaires, partie génératrice

Déf.: $[x_1, ..., x_n] = \mathbb{K} \cdot x_1 + \cdots + \mathbb{K} \cdot x_n = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ sont les **combinaisons linéaires** (CL) des vecteurs $x_1, ..., x_n$ du $\mathbb{K}$-ev E.

Prop.: $[x_1, ..., x_n]$ est s.e.v. (car somme des droites vectorielles engendrées par les x_i).

Déf.: si $F = [x_1, ..., x_n]$, on dit que $\{x_1, ...x_n\}$ est partie **génératrice** de F.

1.6 Somme directe, supplémentaires

Déf.: s.e.v. F, G **linéairement indépendants** ssi $F \cap G = \{o\}$; $F + G$ est alors **somme directe** notée $F \oplus G$, et F et G sont **supplémentaires** dans l'e.v. $F + G$.

Ex.: fonctions numériques $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ paire}\right\} \oplus \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ impaire}\right\}$.

Prop.: $E = F \oplus G \iff \psi : F \times G \to E,\ (y,z) \mapsto y+z$ bijective
$\iff \forall x \in E,\ \exists_1! \,(y,z) \in F \times G : x = y + z$ [unicité de la décomposition].

Déf.: **projecteur** sur F parallèlement à G : $p_F : x \mapsto y$ pour $x = y + z \in F \oplus G,\ (y,z) \in F \times G$

1.7 Famille libre

Déf.: $(v_1, ..., v_n)$ **libre** ssi $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \implies (\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0)$;

Déf.: $(v_1, ..., v_n)$ **liée** ssi non libre, c-à-d. $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ t.q. $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.

Rem.: On dit $\{v_1, .., v_n\}$ libre si $(v_1, ..., v_n)$ libre. (Réciproque fausse si $v_i = v_j$!)

Ex.: $\{(1,0),(1,1)\}$ est libre; $\{v\}$ est libre ssi $v \neq o$, $A = \{v_1, ..., v_n\}$ lié si $o \in A$.

Prop.: $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ libre ssi $\Psi_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^n \to E,\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ est injective
ssi $[v_1, ..., v_n] = [v_1] \oplus \cdots \oplus [v_n]$

1.8 Base

Déf.: **base** de E = famille libre et génératrice de E

Ex.: $e = ((1,0),(0,1))$ base de $\mathbb{R}^2$, de même on a la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Rem.: base pas unique, p.ex. $((1,1),(0,1))$ aussi base de $\mathbb{R}^n$.

Thm.: $(b_1, ..., b_n)$ base de $E \iff \forall x \in E, \exists_1! \,\lambda \in \mathbb{K}^n : x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$
$\iff E = [b_1] \oplus \cdots \oplus [b_n]$.

Déf.: $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sont les **coordonnées** de $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$, par rapport à la base $(b_1, ..., b_n)$.

1.9 dimension

Déf.: e.v. de **dimension finie** ss'il possède partie génératrice finie.

Ex.: $\mathbb{R}^n$. — Contre-exemple : $\mathbb{K}[X]$

Thm.: (fondamental) si $E = [v_1, ..., v_n]$, alors $(x_1, ..., x_{n+1})$ toujours liée.

Cor.: (thm de la dimension) toutes les bases de E ont le même cardinal

Déf.: si b est une base de E, on appelle $\dim E := \operatorname{card} b$ la **dimension** de E.

Cor.: $\dim E = n \implies$ famille libre (génératrice) a au plus (au moins) n vecteurs.

Thm.: (caract.des bases) Une famille de $n = \dim E$ vecteurs est libre ssi génératrice ssi base.

Thm.: (de la base incomplète) si L est libre et $G \supset L$ génératrice, il existe base $B : L \subset B \subset G$.

Cor.: tout ev admet une base.

Cor.: si $\dim E = n$, alors tout sev F admet un supplémentaire G et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Cor.: pour F, G s.e.v. de E, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

1.10 Familles (infinies) de vecteurs

Rappel : famille $f = (f_i)_{i \in I}$ de vecteurs : application $f : I \to E; i \mapsto f_i$.

Ex.: $I = \{1,2\} : f = (f_1, f_2),\ f_i \in E$. $I = \mathbb{N}, E = \mathbb{K}[X] : f = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Déf.: familles presque nulles $E^{(I)} = \{ f \in E^I \mid \{i \in I \mid f_i \neq 0\} \text{ fini} \}$

Déf.: application linéaire attachée à une famille $f \in E^I : \Psi_f : \mathbb{K}^{(I)} \to E,\ (\lambda_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$.

Déf.: famille f libre, génératrice, base ssi Ψ_f injective, surjective, bijective.

Thm.: $(b_i)_i$ base de $E \iff \forall x \in E, \exists_1! \,\lambda \in \mathbb{K}^{(I)} : x = \sum_i \lambda_i x_i$.

Déf.: Pour $x = \sum \lambda_i b_i$, $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont les **coordonnées** de x par rapport à la base $b = (b_i)_{i \in I}$.

Ex.: base canonique de $K^{(I)}$: $e = (e_i)_{i \in I}$ avec $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$.

Thm.: $b = (b_i)_{i \in I}$ base de E, $(f_i)_{i \in I}$ famille de $F \implies \exists_1! \,f \in \mathcal{L}(E,F) : \forall i,\ f(b_i) = f_i$.

1.11 Intersection et somme de familles de sous-espaces vectoriels

Prop.: F, G sev, alors $F \cap G$ sev ; si F_i sev $\forall i \in I$, $\bigcap_i F_i$ est sev.

Ex.: Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{K} \cdot (1,0,0) + \mathbb{K} \cdot (0,1,0),\ G = \mathbb{K} \cdot (1,2,0) + \mathbb{K} \cdot (0,1,2) \implies F \cap G = \mathbb{K} \cdot (1,2,0)$.

Déf.: Pour $A \subset E$, $\operatorname{vect} A := \bigcap_{sev\ F \supset A} F$ est le **s.e.v. engendré par** A.

Prop.: $\operatorname{vect} A = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_1, ..., x_n \in A : x \in [x_1, ..., x_n]\}$, ens. des CL d'éléments de A.

Déf.: **somme** de s.e.v. $(F_i)_{i\in I}$: $\sum_i F_i = \operatorname{vect} \bigcup_i F_i$.

Déf.: **somme directe** de s.e.v. : $\bigoplus_i F_i = \sum_i F_i$ avec $\forall i : F_i \cap \sum_{j\neq i} F_j = \{o\}$.

Prop.: $E = \bigoplus_i F_i \iff \Psi : \prod_i' F_i \to E, (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_i x_i$ bijective. (détail : $\prod' = E^{(I)} \cap \prod$...)

1.12 Opérations élémentaires sur une famille

Déf.: pour $f \in E^I$, $\operatorname{vect} f = \operatorname{vect} \operatorname{im} f$; **rang** de la famille : $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{vect} f$.

Déf.: opérations élémentaires sur famille $(f_i)_{i\in I} \in E^I$: $f_i' = \lambda f_i$ $(\lambda \neq 0)$; $f_i' = f_i + f_j$, $(j \neq i)$.

Prop.: les opérations élémentaires ne changent pas $\operatorname{vect} f$.

Déf.: famille f' **équivalente** à f (noté $f' \sim f$) ssi f' s'obtient de f par opérations élémentaires.

Thm.: (Gauss) pour $(f_1, ..., f_n)$ il existe $f' \sim f$ t.q. $(f_1', ..., f_r')$ libre et $f_i' = o$ pour $i > r = \operatorname{rang} f$.

2 Applications linéaires

2.1 Définitions, exemples, règles de calcul

Déf.: **applications ($\mathbb{K}$–)linéaires** $\mathcal{L}(E,F)$: ensemble des $f \in F^E$ (E, F étant $\mathbb{K}$–e.v.) t.q. $\forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K} : f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$.

Ex.: $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, l'homothétie $h_\alpha : E \to E; x \mapsto \alpha\, x$ est application linéaire (si $\mathbb{K}$ commutatif). Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, on obtient l'application nulle o_E et l'identité id_E.

Ex.: app.lin. attachée à une famille $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$: $\Psi_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^n \to E$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Prop.: $f \in F^E$ linéaire ssi $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Cor.: (règles de calcul) $f \in \mathcal{L}(E,F) \implies f(o_E) = o_F$, $f(-x) = -f(x)$.

Déf.: formes linéaires (dual) $E' = L(E, \mathbb{K})$, **endomorphismes** $L(E) = \operatorname{End}(E) = L(E,E)$.

Ex.: $\forall x \in \mathbb{K}^n$, Ψ_x est forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

2.2 Image, image réciproque, noyau.

Déf.: **image** de $A \subset E$: $f(A) = \{f(x); x \in A\}$; $\operatorname{im} f = f(E)$; **noyau** de $f \in \mathcal{L}(E,F)$: $\ker f = f^{-1}(o) = \{x \in E \mid f(x) = o\}$; **image réciproque** $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Prop.: Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$; E_1, F_1 s.e.v. de $E, F \implies f(E_1), f^{-1}(F_1)$ s.e.v. de F, E ($\rightsquigarrow \operatorname{im} f$, $\ker f$).

Thm.: $\ker f = \{o\} \iff f$ injective.

Rem.: $\operatorname{im} f = F \iff f$ surjective

2.3 Applications bilinéaires, algèbres

Déf.: $\varphi : E \times F \to G$ **bilinéaire** ssi $\forall x \in E, y \in F : \varphi(x, \cdot) \in \mathcal{L}(F,G)$, $\varphi(\cdot, y) \in \mathcal{L}(E,G)$

Prop.: (composée) $\circ : \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) \to \mathcal{L}(E,G)$, $(f,g) \mapsto g \circ f$ est bilinéaire.

Ex.: $\star : \mathbb{K} \times E \to E$ est bilinéaire (considérant $\mathbb{K}$ comme esp.vect.).

Ex.: **produit scalaire** $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Déf.: **algèbre** $(E, +, \cdot, \varphi)$: e.v. $(E, +, \cdot)$ avec application bilinéaire $\varphi : E^2 \to E$.

Ex.: polynômes, avec $\varphi = \cdot$ (produit) ; endomorphismes $L(E)$, avec $\varphi = \circ$.

Rem.: $(L(E), \circ)$ unitaire, associative. $(\mathbb{K}[X], \cdot)$ de plus commutative.

Rem.: pour $[f,g] = f \circ g - g \circ f$, $L(E)$ est algèbre non unitaire, non associative, non commutative.

2.4 Isomorphismes

Déf.: **isomorphismes** $\operatorname{Iso}(E,F) =$ app.lin.bijectives ; ev isomorphes : $E \simeq F \iff \operatorname{Iso}(E,F) \neq \emptyset$

Prop.: $f \in \operatorname{Iso}(E,F) \implies f^{-1} \in \operatorname{Iso}(F,E)$; $g \in \operatorname{Iso}(F,G) \implies g \circ f \in \operatorname{Iso}(E,G)$.

Thm.: $(b_i)_{i\in I}$ base de $E \implies E \simeq \mathbb{K}^{(I)}$; $E \simeq F \iff \dim E = \dim F$.

Déf.: **automorphismes** $\operatorname{Aut}(E) := \operatorname{Iso}(E,E)$, **groupe linéaire** $\mathrm{GL}(E) := (\operatorname{Aut}(E), \circ)$.

Rem.: $\mathrm{GL}(E) = \mathcal{L}(E) \cap S(E)$ sous-groupe de $S(E)$ mais pas un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$: (app.nulle $o \notin \mathrm{GL}(E)$.

Ex.: homothétie $h_\alpha \in \mathrm{GL}(E) \iff \alpha \neq 0$ (ou $E = \{o\}$).

2.5 Théorème du rang

Thm.: $\operatorname{rang} f + \dim \ker f = \dim E$

Cor.: $\operatorname{rang} f \leq \min(\dim E, \dim F)$, f injective si $\operatorname{rang} f = \dim E$, surjective si $\operatorname{rang} f = \dim F$

3 Matrices

3.1 Définitions

Déf.: **matrice** à m lignes, n colonnes, coefficients ds $\mathbb{K}$: $(A_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$

Déf.: matrice ligne $(m = 1)$, colonne $(n = 1)$, carrée $(m = n)$.

Déf.: $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = A =$ matrice des coord. de la famille $\mathcal{F} = (\sum_{i=1}^m A_{ij} b_i)_{j\in J}$ ds la base $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in I}$

3.2 Opérations

Déf.: transposée ${}^t : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, ${}^t\!(A)_{ji} = (A_{ij})$.

Déf.: **produit matriciel** $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$: $A \cdot B = C$ avec $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$.

Rem.: C_{ij} est produit scalaire de la i^e ligne de A avec la j^e colonne de B.

3.3 Matrice d'une app.lin.

Déf.: $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(\mathcal{B})$ pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$; $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de E, F.

Ex.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(x, y) = (x - y, 2y - x) \implies \operatorname{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}} f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. ($\mathbf{e}$ base canonique)

Cor.: $\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f$ $\quad(\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases quelconques)

Prop.: $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases respect. $\implies \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(v) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} v$

Cor.: $\mathcal{F}$ famille $\implies \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(\mathcal{F}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$

Prop.: matrice de la composée $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$: $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}} g \circ f = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}} g \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f$.

Thm.: base de $\operatorname{im} f, \ker f$ à partir de $\operatorname{Mat} f$ avec opérations élémentaires (méthode de Gauss)

3.4 Matrices carrées

Déf.: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$; triangulaire supérieure ($A_{ij} = 0$ si $i > j$), inférieure (0 si $i < j$), diagonale (0 si $i \neq j$) ; **symétrique** si ${}^tA = A$, **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

Prop.: $(\mathcal{M}_n, \cdot)$ est une algèbre.

Déf.: A inversible ssi $\exists B = A^{-1} : AB = BA = \mathbb{1}$.

Prop.: A inversible ssi $\operatorname{rang} A = n$.

3.5 changement de base

Déf.: matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la nlle base $\mathcal{C}$: $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{C}$

Prop.: coord. de $v \in E$ ds nlle base : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} v = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} v$.

Cor.: matrice d'une famille $\mathcal{F}$ de E : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{F} = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$.

Cor.: $P^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$

Prop.: matr. d'une app.lin. ds nlls bases $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$: $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} f = (\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}')^{-1} \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$.

Cor.: matr. d'un endom. ds nlle base $\mathcal{C}$: $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}} f = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot P$.

4 Systèmes linéaires

Déf.: Syst.lin. à m éq., n inconnues : famille d'éq. : $(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i)_{i=1\dots m}$ $\;(S)$.

Prop.: $(S) \iff AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$

Prop.: $(S) \iff f_A(x) = b$ avec $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$, $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}'} f_A = (a_{ij})$

Déf.: $r = \operatorname{rang}(S) = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} f_A$

Déf.: (S) incompatible $\iff AX = B$ n'admet pas de solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. ($A, B$ données)

Prop.: (S) incompatible $\iff b \notin \operatorname{im} f_A \iff B \notin \operatorname{vect} \{A^j\}_{j=1..n}$ (colonnes)

Prop.: Solutions de (S) : $f_A^{-1}(b) = x_0 + \ker f_A$ avec $f_A(x_0) = b$ (x_0 : solution particulière)

Déf.: Système de Cramer : $m = n$ et A inversible ($\iff r = \operatorname{rang}(S) = n$).

Prop.: Pour un système de Cramer, il exise 1 unique solution : $X = A^{-1}B$.

Déf.: inconnues, équations principales : $\{x_{j_1}, ..., x_{j_r}\}$ et $\{i_1, ..., i_r\}$ t.q. sous-système de Cramer.

Prop.: Résolution pratique : triangularisation de Gauss / Gauss-Jordan