NB : La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies! [1 pt]

PARTIE I : ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1. [4 pt]

Soient $u = (1, -2, 3)$ et $v = (-1, 2, 4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et

$$F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : x = \alpha u + \beta v\} .$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et $F \neq \mathbb{R}^3$.
- (b) Montrer que la famille (u, v) est libre. En déduire que pour tout $x \in F$, il existe un unique $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \alpha u + \beta v$.
- (c) Montrer que le vecteur $w = (1, 0, 1)$ n'est pas dans F .
En déduire que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et qu'il y a un unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$f(u) = u, \quad f(v) = v, \quad f(w) = u + v .$$

- (d) Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, exprimer $f(\alpha u + \beta v + \gamma w)$ en terme de u, v, w .
En déduire $f^2(\alpha u + \beta v + \gamma w)$ (avec $f^2 = f \circ f$).
Que peut-on dire de l'endomorphisme f ?

Exercice 2. [4 pt]

On considère l'espace des polynômes $E = \mathbb{R}[X]$.

- (a) Montrer que $f : P \mapsto X P' - P$ est un endomorphisme de E .
(On peut utiliser que la dérivation $P \mapsto P'$ est linéaire.)
- (b) Montrer que $F = \{P \in E \mid \deg(P) \leq 2\}$ est un sous-espace vectoriel de E , et en donner une base.
- (c) Calculer explicitement $f(P)$ pour $P = aX^2 + bX + c \in F$. En déduire que la restriction de f à F est un endomorphisme de F .
- (d) Donner une base de $\text{im } f|_F$. En déduire la dimension de $\text{ker } f|_F$.

PARTIE II : ANALYSE 2

Exercice 3. [3 pt]

Calculer les limites suivantes :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^6 + x^4} - \sqrt{x^4 + x^2} \right)$

Exercice 4. [3 pt]

(a) Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \neq 0$$

admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

- (b) Montrer que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- (c) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en $x = 0$.

Exercice 5. [5 pt]

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(0) = 0 ; \quad f(x) = x^2 (\ln(x+1) - \ln x) \quad \text{pour } x > 0 .$$

- (a) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de zéro. [Rappel : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.]
- (b) En déduire que f est dérivable en 0, et donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ au graphe $\mathcal{C}$ de f en $(0, 0)$.
- (c) Montrer d'abord que $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ (pour $x > 0$), et donner le $DL_3(0)$ de $g : u \mapsto \ln(1 + u)$. Calculer alors le développement limité d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de $h : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
- (d) Déterminer l'équation de la droite Δ asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$, ainsi que la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ .

* * * **Fin** * * *