Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS
Module MIP2
2e semestre 2003-2004

Partiel de Mathématiques 2 — mars 2004

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Première partie : Algèbre Linéaire

Exercice 1. Pour chacun des choix (a)–(f) ci-dessous, jusifiez brièvement s'il est correct (citer un théorème ou donner une preuve de deux lignes maximum) ou donnez un contre-exemple s'il est faux :

- ▶ Une partie non-vide A du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est s.e.v. de $\mathbb{R}^2$, si ...
- (a) ... A est réunion de deux autres s.e.v. (sous-espaces vectoriels) de $\mathbb{R}^2$.
- (b) ... A est intersection d'un nombre quelconque de s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
- (c) ... A est le noyau d'une application linéaire quelconque.
- (d) ... A est l'image d'une application bijective.
- (e) ... A contient toute somme et différence de ses éléments.
- (f) ... pour tout $x, y \in A$ et tout $\lambda > 0$, on a : $x - \lambda\, y \in A$.

Exercice 2. Soit f une application linéaire bijective.
Montrer que l'application réciproque f^{-1} est également linéaire.

Exercice 3. Soit $f \in L(E, F)$ et $(v_1, ..., v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- (a) Montrer que f est surjective, si $\operatorname{vect}\{\, f(v_1), ..., f(v_n)\,\} = F$.
- (b) Montrer que $(f(v_1), ..., f(v_n))$ est liée, si $(v_1, ..., v_n)$ est liée.
- (c) Que peut-on dire de la dimension de E, si $\{\, f(v_1), ..., f(v_n)\,\}$ est libre ?

Exercice 4. On considère le sous-espace $F = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par les quatre vecteurs $v_1 = (1, 4, 1)$, $v_2 = (2, 7, 1)$, $v_3 = (2, 5, -1)$, $v_4 = (1, 2, -1)$.

- (a) Trouver une famille échelonnée qui engendre ce même sous-espace F.
- (b) Déterminer un supplémentaire de F. (Justifiez votre réponse.)

Tournez la page, S.V.P. !

Deuxième partie : Analyse

Exercice 5. Tracer les graphes de $x \mapsto \sin^2 x$ et de $x \mapsto \cos^2 x$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, puis calculer la surface de l'aire délimitée par ces courbes.

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ une fonction numérique trois fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On se propose de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} \; . \tag{1}$$

(a) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à un ordre convenable, montrer qu'on a

$$\forall x, h \in \mathbb{R} : \; f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h) = h^2\, f''(x) + R(x;h) \; , \tag{2}$$

où l'on exprimera $R(x;h)$ comme somme de deux intégrales.

(b) Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème de la moyenne généralisé, montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; \exists z \in [x, y] : \; \int_x^y g(t)\,(y-t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,g(z)\,(y-x)^3 \; . \tag{3}$$

(c) Déduire de la question précédente la valeur de $r(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h^3}\, R(x;h)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

En déduire l'équation (1).

Exercice 7. Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^4}\,\mathrm{d}x.$

Simplifier le résultat. En donner une valeur approchée $(\ln 3{,}7 \approx 1{,}3; \pi \approx 3)$.

* * * Fin * * *