

Partiel de Mathématiques 2 — mars 2003

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

N.B.: À chaque utilisation d'un théorème ou autre résultat du cours, rappelez soigneusement (et vérifiez) les hypothèses sous lesquelles il peut s'appliquer, faute de quoi la conclusion n'a pas de valeur.

Exercice 1.

Calculer $\int_{-3}^3 |x^2 - 2x - 8| \, dx$. [1.5 pts]

Exercice 2.

1. Rapeller la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre n , appliquée à une fonction f sur un intervalle $[a, x] \subset \mathbb{R}$. [1.5 pts]
 (Préciser une condition sur f sous laquelle la formule est valable).
2. En utilisant le théorème de la moyenne généralisé, avec $g(t) = (x - t)^n$, montrer qu'il existe $c \in]a, x[$ tel que le reste d'ordre n soit donné par [1.0 pts]

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) (x - a)^{n+1}.$$

3. En déduire (soigneusement) que $R_n(x) = o((x - a)^n)$ (quand $x \rightarrow a$) et que f admet un $DL_n(a)$. [1.0 pts]

Problème I.

On étudie la fonction numérique F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x E(t) \, dt$, où $E(t) = \sup \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq t \}$ est la partie entière de t .

1. Quel théorème du cours permet d'affirmer l'existence de $F(x)$, pour tout $x > 0$? Quelle est la définition de $F(x)$ pour $x \leq 0$? [1.5 pts]
2. On considère le taux d'accroissement $T_x(h) = (F(x + h) - F(x))/h$.
 - (a) En utilisant la relation de Chasles, donner une expression intégrale de $T_x(h)$. [0.5 pts]
 - (b) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} T_x(h)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. [0.5 pts]
 - (c) Calculer les limites $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} T_x(h)$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} T_x(h)$ pour $x \in \mathbb{Z}$. [1.0 pts]
 - (d) En déduire le domaine de dérivabilité de F , et préciser F' sur ce domaine. [0.5 pts]
 - (e) Est-ce que F est une primitive de E sur $\mathbb{R}_+$? [0.5 pts]
3. Représenter graphiquement les fonctions E et F sur l'intervalle $[-2, 4]$. [1.5 pts]
 (Construire le graphe de F en partant du point $x = 0$ et en utilisant l'interprétation géométrique de la dérivée de F , lorsqu'elle existe.)

Problème II.

On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ des applications numériques continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

1. Rappeller pourquoi E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire habituelle des fonctions. [1.0 pts]

(On peut utiliser que $\mathbb{R}^{[a, b]}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.)

2. Pour tout $g \in E$, on définit $\widehat{g} : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \widehat{g}(f) = \int_a^b f(t) g(t) dt \end{cases}$.

- (a) Montrer que pour tout $g \in E$, $\widehat{g}$ est une forme linéaire sur E . [0.5 pts]

- (b) Montrer que $\phi : \begin{cases} E & \rightarrow L(E, \mathbb{R}) \\ g & \mapsto \widehat{g} \end{cases}$ est une application linéaire [1.5 pts]

injective. (On peut considérer $\widehat{g}(g)$ et utiliser que l'intégrale d'une fonction strictement positive est strictement positive.)

3. (a) Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{P(x)}{(x^4 - 16)^2}$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 7.

Donner la forme générale de la décomposition en éléments simples de f (sans calculer les coefficients). [1.5 pts]

- (b) Montrer que l'ensemble [0.5 pts]

$$F = \left\{ f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{P(x)}{(x^4 - 16)^2} ; P \in \mathbb{R}_7[X] \right\}$$

est un espace vectoriel. (On peut utiliser que $\mathbb{R}_7[X]$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.)

- (c) Donner une base de F constituée d'éléments simples (cf. (3a)). [1.0 pts]
(Utiliser l'unicité de la décomposition en éléments simples.)

4. On considère la fonction numérique

$$f : x \mapsto \frac{16x^3}{(x^4 - 16)^2}.$$

- (a) Peut-on donner la valeur de $\int_{-1}^1 f(x) dx$ sans calculer la primitive ? [1.0 pts]
(Justifiez soigneusement votre réponse.)

- (b) Donner une primitive de f en précisant l'ensemble de définition. [2.5 pts]

- (c) Déterminer une primitive F de f sur D_f vérifiant [1.0 pts]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -1, \quad F(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +1.$$

* * * **Fin** * * *