Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS
Module MIP2
2^{e} semestre 2002

Partiel de Mathématiques 2 — avril 2002

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Première partie : Algèbre Linéaire

Exercice 1. [Les questions (1c)–(1e) sont indépendantes du (1b).] [5.5 pts]

(a) Montrer que l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $(x, y, z) \mapsto (2x-y, y+z, x+y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $\ker u$, le noyau de u. Peut-on déduire que u est injective ?

(c) Montrer que l'ensemble $F = \{ (\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, \mu - 2\lambda) \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

(d) Trouver une base de F. (Justifier la réponse !)

(e) Déterminer l'image de F par u, puis une base de $u(F)$.

Exercice 2. Soit p un endomorphisme d'un e.v. E tel que $p \circ p = p$. Montrer que le noyau de p et l'image de p sont deux sous-espaces supplémentaires de E. [3.5 pts]
(Indication : considérer l'image par p de $x - p(x)$.)

Deuxième partie : Analyse

Exercice 3. (a) Justifier, à l'aide d'arguments simples (sans faire de calcul), qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan x = x + \alpha\, x^3 + o(x^3)$ (pour $x \to 0$). [3.0 pts]

(b) A l'aide du (a), trouver un $DL_4(0)$ de $x \mapsto \tan^2 x$, en fonction de α.

(c) En déduire un $DL_4(0)$ de $(\tan x)'$, puis le $DL_5(0)$ de $\tan x$ (d'abord en fonction de α, que l'on précisera en comparant ce résultat au (a).)

Exercice 4. (a) Montrer que $f : t \mapsto \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{\tan^2 t}}$ $(0 < |t| < \frac{\pi}{2})$ admet un prolongement par continuité en 0, que l'on précisera. (Utiliser un D.L.) [5.5 pts]

(b) Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(t)$. (On peut utiliser l'exercice 3.)

(c) Faire une étude locale du prolongement de f au point $x = 0$ (nature du point, tangente, position relative, convexité ou concavité).

Exercice 5. Calculer, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$: $I_{m,n} = \displaystyle\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m (t-\beta)^n \,\mathrm{d}t$, où α, β sont deux réels quelconques. [2.5 pts]
(Indication : à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, puis en déduire $I_{m,n}$ en fonction de $I_{0,n+m}$ que l'on calculera.)