Université Antilles–Guyane — UFR Sciences Exactes et Naturelles
Département Scientifique Interfacultaire (campus de Schœlcher)

MIAS-1 / Maths 2 : Memento pratique en algèbre linéaire (suite):

Calcul matriciel et Applications

Généralités concernant le calcul matriciel

On note
– $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les matrices à n lignes et p colonnes, à éléments $A_{ij} \in \mathbb{K}$, $(i=1,...,n\,;\ j=1,...,p)$
– $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ les matrices carrées d'ordre n,
– $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale telle que $A_{ii} = \lambda_i$ et $A_{ij} = 0$ $(i \neq j)$,
– $I_n = \mathrm{diag}(1, ..., 1)$ la matrice identité (ou « unité ») d'ordre n.

Une matrice A à p colonnes peut multiplier (à gauche) une matrice B ssi cette dernière a p lignes ; le résultat est la matrice $C = A \cdot B$ constituée des produits scalaires des lignes de A et des colonnes de B : $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}\, B_{kj}$.

Une matrice est **inversible** ssi, il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = I$; c'est le cas ssi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1}{\cdot}A = I_n$ ou $A{\cdot}A^{-1} = I_n$. (Exercice : donner deux matrices A, B telles que $A{\cdot}B = I$ et $B{\cdot}A \neq I$.)

Opérations élémentaires, réduite de Gauss-Jordan, calcul d'inverse

Une **opération élémentaire** sur les lignes [resp. colonnes] d'une matrice A correspond à la multiplication à gauche [resp. droite] par une matrice inversible[1] P.

La **méthode du pivot** (opérations élémentaires sur les lignes de A) permet d'obtenir une matrice échelonnée, appelée réduite de Gauss de A, et en particulier la **réduite de Gauss-Jordan**[2] de A (unique), telle que le premier élément non nul de chaque ligne est égal à 1 et le seul élément non nul de sa colonne.

Si la réduite de Gauss–Jordan d'une matrice augmentée $(A \,\vdots\, B)$ (à n lignes et $n+p$ colonnes) est de la forme $(I_n \,\vdots\, X)$, alors $X = A^{-1} \cdot B$; en particulier pour $B = I_n$ on obtient $X = A^{-1}$: c'est la **méthode pratique pour le calcul de l'inverse d'une matrice** (**voir T.D. série 5, exo 9**).

[1] avec $P = P_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ pour l'ajout de λ fois la j^e à la i^e ligne, où $(E_{ij})_{i,j}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ici $n = p$), et alors $P^{-1} = P_{ij}(-\lambda)$, sauf si $i = j$, auquel cas P est diagonale, multipliant la i^e ligne par $1 + \lambda$ (donc $\lambda \neq -1$), et $P^{-1} = P_{ii}(\frac{1}{\lambda+1} - 1)$.

[2] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), M. E. Camille Jordan (1838–1922).

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $\operatorname{rg} A$, est égal :
- au rang de l'application $f \in L(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) :\ X \mapsto f(X) = A \cdot X$,
- au rang du système des vecteurs colonnes de A,
- au rang de toute famille $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_p)$ dont A est la matrice dans une certaine base (voir ci-dessous) : $\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}) = \operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim \operatorname{vect} \mathcal{F}$,
- au rang de toute matrice obtenue de A par opérations sur les **colonnes** (calcul pratique d'une base de $\operatorname{vect}\{ v_1, ..., v_n \}$ et $\operatorname{im} f$),
- au rang du système des vecteurs **lignes** de A,
- au rang de la matrice transposée de A, notée ${}^tA$: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tA)$,
- au rang de toute matrice obtenue par opérations sur les **lignes** de A (calcul pratique du noyau),
- au rang de toute matrice $A' = Q \cdot A \cdot P$ avec P, Q inversibles,
- au rang de toute application linéaire ayant A comme matrice par rapport à certaines bases (voir plus loin) : $\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f) = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f$.

Résolution d'un systèmes d'équations linéaires

Un système de n équations linéaires à p inconnues et coefficients dans $\mathbb{K}$ peut s'écrire sous la forme $A{\cdot}X = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour le résoudre, il suffit d'obtenir la réduite de Gauss-Jordan de la matrice étendue $(A \,\vdots\, B) \in \mathcal{M}_{n,p+1}$, soit $(A' \,\vdots\, B')$. Si la dernière ligne non nulle est de la forme $(0 \cdots 0 \,\vdots\, 1)$, le système est **incompatible,** c-à-d. il n'admet aucune solution.

Sinon, l'équation $A'{\cdot}X = B'$ donne immédiatement les $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$ **inconnues principales** $\{ x_j\, ;\, j \in J \}$ correspondant aux éléments de pivot, premiers éléments non nuls des lignes de A', en fonction du membre de droite B' et des $(p-r)$ inconnues non principales $\{ x_k\, ;\, k \in K \}$, que l'on fait passer dans le membre de droite, et qui joueront le rôle de paramètres libres, non déterminés par le système.

En complétant le système par des équations $x_k = x_k$ pour chaque $k \in K$, on a les solutions sous la forme

$$X = X_0 + \sum_{k \in K} x_k\, V_k\ ,\quad \text{avec les } x_k \in \mathbb{K} \text{ arbitraires,}$$

où X_0 et les V_k sont obtenus de B' et des $k^{\text{ièmes}}$ colonnes de $-A'$, en insérant des lignes nulles pour chaque $k \in K$, sauf un 1 en k^e position de V_k (correspondant à l'équation $x_k = x_k$).

Matrice d'une famille de vecteurs

La matrice d'une famille $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_p)$ de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$–e.v. par rapport à une base $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ est par définition la matrice
$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $\forall j \in \{1, ..., p\} : v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$.

Autrement dit, la j^e **colonne** de A contient les **coordonnées** de v_j dans la base $\mathcal{B}$. On peut donc la déterminer en exprimant chaque vecteur de $\mathcal{F}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est échelonnée, c'est facile (pour v_j, on a d'abord $a_{1j} = (v_j)_1/(b_1)_1$ (rapport des 1^{es} composantes), puis on trouve a_{2j} en divisant la 2^{e} composante de $v_j - a_{1j}b_1$, par celle de b_2, et ainsi de suite, en soustrayant après chaque étape le vecteur $a_{ij}b_i$ du « reste » à décomposer.)

Sinon, il faut en principe résoudre le système linéaire qui donne les coefficients a_{ij}, pour chaque v_j. Si on note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B}$ la **matrice de passage** de $\mathcal{E}$ (base canonique ou celle dans laquelle on connaît les b_i et les v_j) à la base $\mathcal{B}$, ce système s'écrit $P \cdot A_j = F_j$, l'indice indiquant la j^e colonne des matrices $F = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{F}$ (soit : $F_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(v_j)$) et A (en effet, $A_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j)$).

En juxtaposant ces p matrices colonnes (membres de gauche d'une part, et membre de gauche d'autre part), ces p équations sont équivalentes à l'équation matricielle $P \cdot A = F$, le calcul du membre de gauche pouvant se faire colonne par colonne.

La matrice P est forcément inversible (pourquoi ?), c'est donc un système de Cramer pour chaque colonne, dont la solution est $A_j = P^{-1} \cdot F_j$, soit :

$$A = P^{-1} \cdot F \ , \quad \text{ou encore :} \quad \begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})\big)^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \ . \end{aligned}$$

C'est sous cette dernière forme que la formule est le plus facilement mémorisable ; on retrouve cet « effet téléscopique » (base en indice égale à la base « en haut » immédiatement précédente) dans nombreuses formules similaires, voir les « applications » de la page suivante.

N.B. : au lieu de calculer l'inverse de P et de multiplier ensuite par F, on peut calculer la réduite de Gauss-Jordan de $(P \,\vdots\, F)$, qui est en effet égale à $(I \,\vdots\, A)$ avec $A = P^{-1} \cdot F$: c'est en effet la résolution simultanée des p systèmes linéaires $P \cdot X = F_j$ pour $X = A_j$, $j = 1, ..., p$.

Matrice d'une application linéaire

La matrice d'une application $f \in L(E,F)$ par rapport aux bases $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_p)$ et $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ de E et F, n'est autre que la matrice de $f(\mathcal{B})$, famille image de la base « de départ », dans la base $\mathcal{C}$ de l'espace d'arrivée,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(\mathcal{B}) \quad (=: \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f \quad \text{pour} \quad \mathcal{C} = \mathcal{B},\ F = E,\ f \in L(E)) \ ,$$

ce qui est équivalent, avec $(a_{ij}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, à $f(b_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, c_i$.

On calcule donc $f(\mathcal{B})$ (généralement $f(b_i)$ pour chaque i), qu'il faut exprimer dans la base $\mathcal{C}$ comme détaillé précédemment.

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques, il est généralement immédiat d'écrire la matrice de f à partir de la définition de f : en particulier, pour $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ définie par $f(x,y,z,...) = (a_{11}x + a_{12}y + \cdots, a_{21}x + a_{22}y + \cdots, ...)$, on range les coefficients de x dans la 1$^{\text{e}}$ colonne, ceux de y dans la 2$^{\text{e}}$ colonne, etc. (On peut aussi écrire les coefficients de $x, y, ...$ de la 1$^{\text{e}}$ composante dans la 1$^{\text{e}}$ ligne, puis ceux de la 2$^{\text{e}}$ composante dans la 2$^{\text{e}}$ ligne, etc.)

[Exercice : sous quelle condition a-t-on $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \Psi_{\mathcal{F}} = \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}} \mathcal{F}$, où $\Psi_{\mathcal{F}}$ est l'application linéaire attachée à $\mathcal{F}$?],

Les **applications** de la notion de matrice d'une application sont le calcul de...

- $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f)$ (opérations sur lignes **et** colonnes possibles !)
- $\operatorname{im} f$: échelonner les **colonnes** de $\operatorname{Mat} f$ pour obtenir une base ;
- $\ker f$: calculer la réduite de Gauß-Jordan de $\operatorname{Mat} f$, complétée par des lignes avec -1 sur la diagonale, dont les colonnes donnent le noyau ;
- l'image d'un vecteur : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(x) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = ...$
  (écrire la version « téléscopique » de cette formule en utilisant $f(\mathcal{B})$)
- l'image d'une famille de vecteurs, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(\mathcal{F}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = ...$
- la matrice d'une application composée, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}} g \circ f = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}} g \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f = ...$

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ne sont pas les bases canoniques, on fait généralement un **changement de base** pour obtenir $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ à partir de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ étant les bases (par exemple canoniques) dans lesquelles on connaît $\operatorname{Mat}(f)$. En utilisant la définition de $\operatorname{Mat}(f)$ et les formules pour l'image d'une famille et la matrice d'une famille dans une nouvelle base, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B})) &= \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{F}}(f(\mathcal{E})) \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B} \\ &= (\operatorname{Mat}_{\mathcal{F}} \mathcal{C})^{-1} \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B}\end{aligned}$$

et pour $f \in L(E)$: $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1} \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \cdot P}$, avec $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B}$.