Université Antilles–Guyane — UFR Sciences Exactes et Naturelles
Département Scientifique Interfacultaire (campus de Schœlcher)

MIAS-1 / Maths 2 : Memento pratique en algèbre linéaire

1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

1. Pour **montrer qu'un ensemble** E **est un e.v.**, il suffit généralement de montrer que E est un s.e.v. d'un autre e.v. bien connu (ex. : fonctions ayant une certaine propriété, matrices d'une forme particulière, ...)
2. Pour **montrer que** E **est s.e.v.**, on ***peut*** utiliser le critère de s.e.v. :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : u + \lambda v \in E$$

   ou une variante ($u + v \in E$ et $\lambda u \in E$, ou : $\lambda u + \mu v \in E$).
   Il faut alors utiliser la **définition** de E, afin d'exprimer les propositions $u \in E$ et $v \in E$ au départ, et $u + \lambda v \in E$ à « l'arrivée », plus concrètement comme propriété portant sur u et v (lien entre les composantes d'un vecteur, équation vérifiée, ...)
3. Parfois il est **plus facile** de m.q. E est s.e.v. en montrant que
   (a) $E = \ker f$, c-à-d. E **est le noyau** d'une certaine application linéaire f : par exemple, $\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_2 = x_3 \}$ est le noyau de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, y - z)$.
   Attention : il faut aussi montrer que l'application est en effet linéaire (voir ci-dessous), sauf si c'est évident. (Soyez honnêtes !)
   $\Longrightarrow$ on utilise ici le **Thm. : le noyau d'une app. lin. est un s.e.v.**
   (b) $E = [u, v, w, ...] = \text{vect}\{ u, v, w... \}$, c-à-d. E est égal à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de certains éléments (vecteurs, matrices, fonctions...).
   $\Longrightarrow$ on utilise ici le **Thm. : l'ensemble des comb. lin. d'une partie** ou famille **est un s.e.v.** (égal au s.e.v. engendré par cette partie)

   Moins souvent, on utilisera aussi les Thms affirmant que
   (c) E est s.e.v. si E est l'**intersection** de certains autres s.e.v.
   (d) E est s.e.v. si E est **somme** d'autres s.e.v.
   (Attention : la *réunion* de s.e.v. n'est pas s.e.v. en général !)

Famille libre, génératrice, base et dimension d'un s.e.v.

La **dimension** d'un (sous-)espace vectoriel est le cardinal de l'une de ses **bases**, c-à-d. d'une famille qui engendre cet espace et qui est libre.

Une famille $(v_1, ..., v_n)$ est **libre** ssi :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = o \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, ..., \lambda_n = 0\ .$$

En général, la résolution de cette équation vectorielle n'est pas évidente. (Pour $v_i \in \mathbb{R}^m$, chacune des m composantes donne une équation pour les n inconnues λ_i.) Or, si la famille (v_i) est echelonnée, c-à-d. par exemple

$$v_1 = (1, *, *, *, ...),\ v_2 = (0, 0, 1, *, *, *, ...), ...,\ v_n = (0, ..., 0, 1, *),$$

alors il est immédiat que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = o$ implique, en vue de la 1^e composante, que $\lambda_1 = 0$; puis, la 3^e composante donne $\lambda_2 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_n = 0$, la famille est donc libre. Si par contre le dernier vecteur de la famille est le vecteur nul, on peut prendre $\lambda_n \neq 0$, et la famille est liée :

- une famille qui contient le vecteur nul est toujours liée,
- une famille échelonnée est libre si elle ne contient pas le vecteur nul.

La méthode du pivot de Gauss permet, pour tout système de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$, de trouver un système échelonné équivalent, qui engendre le même s.e.v. Les vecteurs non-nuls de la famille échelonnée sont alors une base du s.e.v. engendré, leur nombre sa dimension.

Dans un espace <u>de dimension d</u> :

- une famille de **plus de d vecteurs** est toujours **liée**,
- une famille **libre** peut avoir **au plus** d vecteurs,
- pour une famille de <u>d vecteurs</u>, **libre** $\iff$ **génératrice** $\iff$ **base**.

Ainsi, si un sous-espace F de E est de la même dimension que E, toute base de F est base de E, d'où : $F = E$! En particulier :

si $f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ vérifie $\operatorname{rg} f = n$ (voir ci-dessous), alors $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^n$... **mais : on n'a pas** $\operatorname{rg} f = k \implies \operatorname{im} f = \mathbb{R}^k$ **si** $k < n$ **!!** : $\operatorname{im} f$ est toujours un ensemble de vecteurs à n composantes (éléments de $\mathbb{R}^n$), quel que soit $\operatorname{rg} f$!).

2 Application linéaires

Pour **montrer qu**'une application $f : E \to F$ **est linéaire**, on ***peut*** utiliser la définition,

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ f(u + v) = f(u) + f(v),\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

ou une variante équivalente : $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$, ou encore $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

comparer au critère de s.e.v. — différences ?

Il faut alors calculer le vecteur somme $u + v$, appliquer la définition de f, et voir si ce résultat est égal à la somme des vecteurs $f(u)$ et $f(v)$.

Dans le cas fréquent où $E = \mathbb{R}^n$, il est **plus rapide** d'écrire $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sous la forme

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n$$

avec (comme on constatera !) $\vec{v}_i = f(e_i)$: $\vec{v}_1 = f(1,0...0), ..., \vec{v}_n = f(0...0,1)$.
et on sait qu'une application de cette forme est linéaire : c'est l'application linéaire attaché à la famille $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, linéaire d'après une Prop. du cours.
P.ex. l'application du **1**.(3a) s'écrit $f(x,y,z) = x\,(1,0) + y\,(2,1) + z\,(0,-1)$, c'est donc l'app. lin. attachée à la famille $((1,0),(2,1),(0,-1))$, dc linéaire.

Image et noyau

Cette écriture de f montre aussi que l'**image** de f est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ (voir le cours à ce sujet aussi : $[(v_i)] = \Psi_{(v_i)}$!), soit :

$$\operatorname{im} f = [\, f(e_1), ..., f(e_n)\,] \text{ , où } (e_1, ..., e_n) \text{ est une base de } E = D_f \,;$$

on en détermine une base en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec cette base, on connaît $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f$, d'où aussi (**Thm. du rang** !)

$$\dim \ker f = n - \operatorname{rg} f \ , \ (n = \dim E = \dim D_f) \ ,$$

information **utile pour déterminer** $\ker f$ **: si** $\dim \ker f = 0$, alors $\ker f = \{\, o \,\}$; **si** $\dim \ker f = 1$, alors $\ker f = \operatorname{vect}\{\, v \,\}$ avec v n'importe quel vecteur non-nul tel que $f(v) = o$; **si** $\dim \ker f = 2$, alors une base de $\ker f$ est donnée par deux vecteurs non proportionnels annulant f.

P.ex. pour f ci-dessus, on a $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^2 \implies \operatorname{rg} f = 2 \implies \dim \ker f = 1$, on trouve (déf. au **1**.(3a)) $f(x,y,z) = 0 \iff y = z$ et $x = -2y$, donc $\ker f = \operatorname{vect}\{\, (-2,1,1) \,\}$.

Le calcul matriciel fournit une méthode générale et efficace pour trouver le noyau d'une application linéaire :

concernant le cours...

L'intérêt du cours est double : il donne des théorèmes utiles dans les applications (si !), mais en même temps c'est un recueil d'exercices corrigés ! En effet, les Propositions et Théorèmes sont les exercices : « montrer que... », les démonstrations sont les solutions ; elles illustrent comment on utilise les notions (définitions) et les théorèmes rencontrés auparavant.