Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département Scientifique Interfacultaire, Campus de Schoelcher

Développements limités élémentaires

Ces formules s'obtiennent toutes par la formule de Taylor, c'est-à-dire on a $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ pour coefficient de $(x-x_0)^n$ (et ici partout $x_0 = 0$).
$o(x^n)$ représente une fonction inconnue de la forme $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
e^x = \exp x &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + ... + \frac{1}{n!}\,x^n + o(x^n)\\
\sin x &= x - \frac{1}{6}\,x^3 + -... + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\,x^{2\,n+1} + o(x^{2\,n+2})\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + -... + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + o(x^{2\,n+1})\\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}\,x^2 + -... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n + o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,x^2 + ... + \binom{\alpha}{n}\,x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

$$\text{avec}\quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}\cdots\frac{\alpha-n+1}{n}$$

Attention : Le DL d'une composée $f(u(x))$ s'obtient par substitution du $DL(x_0)$ de $u(x)$ dans le $DL(u_0)$ de $f(u)$ <u>en $u_0 = u(x_0)$</u>.
Il faut donc séparer cette constante pour pouvoir utiliser le $DL(0)$ de f.
(Exemple : chercher le $DL_4(0)$ de $\exp(\exp x)$ et de $\sin(x+a)$.)

Quelques autres DL : (donnés à titre indicatif)

$$\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \frac{17}{315}\,x^7 + \frac{62}{2835}\,x^9 + o(x^{10})\\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + ... + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdots 2n\cdot(2n+1)} + o(x^{2\,n+1})\\
\arctan x &= x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 - +... + (-1)^n\frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1} + o(x^{2\,n+2})
\end{aligned}$$

et on a : $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$; $\arctan\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2} - \arctan x$ ($\rightsquigarrow DL_n(\pm\infty)$).

N.B. : Pour $\tan x$, le coefficient général s'exprime en terme des nombres de Bernoulli. Pour les fonctions $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et leurs réciproques, on a $\cos x = \operatorname{ch}(i\,x) = \Re e\, e^{i\,x}$, $\sin x = \frac{1}{i}\operatorname{sh}(i\,x) = \Im m\, e^{i\,x}$, $\operatorname{Arsh}(x) = \frac{1}{i}\arcsin(i\,x)$... (donc le signe d'un terme sur deux du DL change).

Primitives des fonctions usuelles

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{Arsh} x + C \;=\; \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_2$$

$$\int f(u(x))\, u'(x) \,\mathrm{d}x = F(u(x)) \qquad \text{avec} \quad F(u) = \int f(u) \,\mathrm{d}u \; .$$

C'est la formule du changement de variable d'intégration, valable si u est une bijection telle que u et u^{-1} soient continûment dérivables sur l'intervalle en question (sinon il faut le découper en sous-intervalles).
En terme d'intégrales définies, on a

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u(x))\, u'(x) \,\mathrm{d}x \; .$$

Exercice : Refaire le tableau avec $a\,x+b$ au lieu de x [poser $u(x) = a\,x+b \rightsquigarrow \int f(a\,x+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(a\,x+b)$] et $a\,x^2+b\,x+c$ au lieu de $1 \pm x^2$ (moins évident).

Intégration par parties : Pour $f, g \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$, on a

$$\int f'(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x) \,\mathrm{d}x$$

ou encore, avec $I = [a,b]$ et en utilisant les intégrales définies :

$$\int_a^b f'(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\, g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x) \,\mathrm{d}x$$