Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département Scientifique Interfacultaire, Campus de Schoelcher

# Développements limités élémentaires

Ces formules s'obtiennent toutes par la formule de Taylor, c'est-à-dire on a $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ pour coefficient de $(x - x_0)^n$ (et ici partout $x_0 = 0$).
$o(x^n)$ représente une fonction inconnue de la forme $x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
e^x = \exp x &= 1 + x + \frac{1}{2}\, x^2 + ... + \frac{1}{n!}\, x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}\, x^3 + - ... + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, x^{2\,n+1} + o(x^{2\,n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}\, x^2 + - ... + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, x^{2\,n} + o(x^{2\,n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}\, x^2 + - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\, x^2 + ... + \binom{\alpha}{n}\, x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

$$
\text{avec} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}\cdots\frac{\alpha-n+1}{n}
$$

**Attention :** Le DL d'une composée $f(u(x))$ s'obtient par substitution du $DL(x_0)$ de $u(x)$ dans le $DL(u_0)$ de $f(u)$ en $u_0 = u(x_0)$.
Il faut donc séparer cette constante pour pouvoir utiliser le $DL(0)$ de $f$.
(Exemple : chercher le $DL_4(0)$ de $\exp(\exp x)$ et de $\sin(x+a)$.)

**Quelques autres DL :** (donnés à titre indicatif)

$$
\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{2}{15}\, x^5 + \frac{17}{315}\, x^7 + \frac{62}{2835}\, x^9 + o(x^{10}) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + ... + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\, x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdots 2n\cdot(2n+1)} + o(x^{2\,n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{5}\, x^5 - + ... + (-1)^n \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1} + o(x^{2\,n+2})
\end{aligned}
$$

et on a : $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ ; $\arctan \frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2} - \arctan x$ ($\rightsquigarrow DL_n(\pm\infty)$).

**N.B. :** Pour $\tan x$, le coefficient général s'exprime en terme des nombres de Bernoulli. Pour les fonctions $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et leurs réciproques, on a $\cos x = \operatorname{ch}(i\,x) = \Re e\, e^{i\,x}$, $\sin x = \frac{1}{i}\operatorname{sh}(i\,x) = \Im m\, e^{i\,x}$, $\operatorname{Arsh}(x) = \frac{1}{i}\arcsin(i\,x)$... (donc le signe d'un terme sur deux du DL change).

# Primitives des fonctions usuelles

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{Arsh} x + C \;=\; \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_2$$

$$\int f(u(x))\, u'(x) \,\mathrm{d}x = F(u(x)) \qquad \text{avec} \;\; F(u) = \int f(u) \,\mathrm{d}u \;.$$

C'est la formule du changement de variable d'intégration, valable si $u$ est une bijection telle que $u$ et $u^{-1}$ soient continûment dérivables sur l'intervalle en question (sinon il faut le découper en sous-intervalles).
En terme d'intégrales définies, on a

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u(x))\, u'(x) \,\mathrm{d}x \;.$$

**Exercice :** Refaire le tableau avec $a\,x+b$ au lieu de $x$ [poser $u(x) = a\,x+b \rightsquigarrow \int f(a\,x+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(a\,x+b)$] et $a\,x^2+b\,x+c$ au lieu de $1 \pm x^2$ (moins évident).

**Intégration par parties :** Pour $f, g \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, on a

$$\int f'(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x) \,\mathrm{d}x$$

ou encore, avec $I = [a, b]$ et en utilisant les intégrales définies :

$$\int_a^b f'(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x = \Big[ f(x)\, g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x) \,\mathrm{d}x$$