Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique, Campus de Fouillole
Département Scientifique Interfacultaire, Campus de Schoelcher

DEUG MIAS — Module MIP2 — Mathématiques 2

*** * * Examen de septembre 2001 * * ***

Durée : 3 heures — Aucun document ni calculatrice autorisés !

NB : La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies ! [1 pt]

Partie I : Algèbre Linéaire [9 pts]

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (3\,x - z, x - y + 2\,z, 5\,x + 3\,y - 4\,z)\ .$$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer $\ker f$. En déduire le rang de f, puis $\operatorname{im} f$.

(d) Déduire de la question précédente que A est une matrice inversible et calculer son inverse A^{-1}.

(e) Déterminer l'application inverse de f que l'on notera f^{-1}.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire dont la matrice A par rapport aux bases canoniques est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{im} f$. Quelle est la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels ? Justifier votre réponse avec précision.

Partie II : Analyse 2 [11 pts]

Exercice 3. On considère la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{2\,x^3 + 4\,x^2 - 1}{x^2 + 2\,x + 3} \ .$$

(a) Effectuer la division Euclidienne de $2\,x^3 + 4\,x^2 - 1$ par $x^2 + 2\,x + 3$.

(b) En utilisant la question précédente, calculer $g(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Résoudre sur $]1, +\infty[$, l'équation différentielle

$$(1 - x)\,y' + x\,y = (x - 1)^2 \ . \qquad (E)$$

Exercice 5. Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \ .$$

(a) Déterminer le domaine de définition D de f .

(b) i. Donner le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, de la fonction $g : t \mapsto \ln(1 + t)$.

  ii. Calculer le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, de la fonction $h : t \mapsto t\,f(1 + t)$.

  iii. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, puis $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

  iv. Montrer que la courbe (C) de f admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction (Ox).

(c) Pour tout $x > 0$ on pose

$$\phi(x) = (\ln x)^2 + (x - 1)^2(\ln x - 1) \ .$$

Exprimer la dérivée $f'(x)$ en fonction de $\phi(x)$, pour tout $x \in D$.

(d) Calculer $\phi'(x)$ et $\phi''(x)$, pour tout $x > 0$. [On écrira $\phi''(x) = A(x) + 2\,B(x)\,\ln x$, où A et B sont des fonctions rationnelles.]

(e) i. Montrer que $\phi''(x) \geq 0$, pour tout $x > 0$.

  ii. En déduire le signe de $\phi'(x)$, puis les variations de f.

$*\ *\ *$ **Fin** $*\ *\ *$