

NB : La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies ! [1 pt]

PARTIE I : ALGÈBRE LINÉAIRE [9 pts]

Exercice 1. On considère les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ munis de leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + y + 2z, -x + 2y + z, y + z) .$$

- (a) Montrer que f est une application linéaire.
- (b) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$. En déduire la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
- (c) i. Déterminer $\ker f$. Quelle est la dimension de $\ker f$?
ii. En déduire que f est de rang 2 et donner une base de $\operatorname{im} f$.
- (d) On pose

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \quad \varepsilon'_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 , \quad \varepsilon'_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 , \quad \varepsilon'_4 = \varepsilon_4 .$$

- i. Ecrire la matrice Q de la famille $\mathcal{C}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_4)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- ii. Montrer que Q est inversible et calculer son inverse Q^{-1} par la méthode de Gauss.
- (e) i. Déduire de la question précédente que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
ii. Quelle est la matrice A' de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'$?

Exercice 2. Etudier le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(On pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.)

PARTIE II : ANALYSE 2 [11 pts]

Exercice 3.

- (a) En utilisant le changement de variable $x = \tan t$, calculer $\int \frac{dt}{\cos^2 t}$.
 (On rappelle que $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.)
- (b) Résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - t^2) y' + (t + 3) y = \frac{(1 - t)^3}{\cos^2 t}.$$

Exercice 4.

- (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - y' - 2y = e^x (6x - 1) \quad (E)$$

- (b) Trouver la solution y_1 à (E) vérifiant

$$y_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x y_1(x) = 0.$$

(On rappelle que si $\alpha > 0$, alors $\forall \beta \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\alpha x} x^\beta = 0$.)

Exercice 5.

Soit (C) la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = -2t + e^{2t} \\ y(t) = 2 + t^2 - \frac{1}{2}t^4 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que (C) admet un point stationnaire, puis déterminer sa nature.
- (b) Etudier les branches infinies (arc infinis) de (C) .
- (c) Etablir le tableau de variations des applications coordonnées x et y .
- (d) i. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $M(0)$.
 ii. Calculer le $DL_3(0)$ de $f(t) = \frac{1}{2} + t + t^2 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{2}e^{2t}$.
 iii. Donner la position de (C) par rapport à (T) au voisinage de $M(0)$.
- (e) Tracer soigneusement la courbe (C) , en admettant l'existence d'un unique point double de (C) , situé sur l'arc entre $M(0)$ et $M(1)$.
 (Prendre $e^2 = 7,4$ et $e^{-2} = 0,15$.)

* * * **fin** * * *