Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et d'Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS/MASS
Module MIP2/MIE2

2e semestre 2002

Examen de Mathématiques 2, deuxième session — septembre 2002

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

N.B.: Le soin apporté à la rédaction est un élément d'appréciation important!

Première partie : Analyse [10 pts]

Exercice 1. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante : [1.5 pts]

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)\,(2-x)\,(3-x)} \ .$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle [2.5 pts]

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = \sin 2x \ . \qquad (E)$$

(a) Trouver la solution générale de (E).

(b) Déterminer la solution y_0 de (E) telle que $y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = 0$.

Exercice 3. On considère la fonction numérique définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par [6.0 pts]

$$f(x) = \frac{-x^2}{\ln(\cos x)} \ .$$

(a) Donner le développement limité d'ordre quatre (4) au voisinage de zéro des fonctions $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \ln(1+x)$, et $x \mapsto \ln(\cos x)$.

(b) Calculer le développement limité d'ordre deux (2) au voisinage de zéro de f.

(c) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0, noté $\tilde{f}$.

(d) Justifier par les résultats précédents l'existence et la valeur de $\tilde{f}'(0)$.

(e) Donner une équation de la tangente au graphe de $\tilde{f}$ en $x = 0$.

(f) On pose $\varphi(x) = 2\ln(\cos x) + x\tan x$.
Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(g) En déduire le signe de $\varphi(x)$, puis les variations de $\tilde{f}$.

Tournez la page, S.V.P. ! $\Longrightarrow$

Deuxième partie : Algèbre Linéaire [10 pts]

Exercice 4. (Questions de cours.)

(a) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et S une famille de p vecteurs de E. Que peut-on dire de n et p dans chacun des cas suivants : [1.5 pts]

i. S est une famille libre,

ii. S est une famille génératrice,

iii. S est une base de E.

(b) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$, et f une application linéaire de E dans F. [1.0 pts]
Que peut-on dire de f dans chacun des cas suivants :

i. f est injective,

ii. f est surjective.

Exercice 5. On considère les $\mathbb{R}$–e.v. $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ munis de leurs bases canoniques $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ donnée par la matrice [5.0 pts]

$$G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

(a) Déterminer $\ker g$ et en déduire $\operatorname{rang} g$ et $\operatorname{im} g$.

(b) Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, y, -2x - 3y - 3z)$ est une application linéaire, et donner sa matrice F dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Calculer la matrice A de $f \circ g$ par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

(d) Déduire que f est bijective et déterminer la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 6. Résoudre (par la méthode de Gauss) le système linéaire [2.5 pts]

$$\begin{cases} x + y + z + v + w = 1 \\ x - y + z - v + w = -1 \\ x + y - z - v + w = 1 \\ x - y - z + v + w = -1 \\ x - y - z - v + w = \alpha \end{cases} ,$$

en fonction de la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

* * * Fin * * *