

Examen de Mathématiques 2 — mai 2004

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

PREMIÈRE PARTIE : ANALYSE

Exercice 1. [6 pts] On étudie la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \frac{\pi \ln x}{\sin \pi x} . \quad (1)$$

- (a) [1.5 pts] Rappeler une formule donnant le $DL_2(1)$ (développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 1$) d'une fonction en termes de ses dérivées en x_0 , et une condition sous laquelle cette formule est valable.
 Peut-on l'appliquer à la fonction f définie dans l'équation (1) ci-dessus ?
- (b) [2.5 pts] Donner le $DL_3(1)$ de $x \mapsto \sin(\pi x)$ et de $x \mapsto \ln x$. En utilisant ces résultats, calculer le $DL_2(1)$ de f .
- (c) [1 pt] En déduire que f admet un prolongement par continuité, $\tilde{f}$, en $x = 1$, dérivable en $x = 1$.
- (d) [1 pt] Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$ en $(1, \tilde{f}(1))$, et déduire du (b) sa position par rapport à $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$.

Exercice 2. [3.5 pts] Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = x e^x .$$

Donner la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.

DEUXIÈME PARTIE : ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 3. [7 + 1 pts] On considère l'endomorphisme $f \in L(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ,$$

et la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

- (a) [0.5 pts] Ecrire les matrices $F = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ et $P = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$, par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- (b) [3.5 pts] Calculer le produit matriciel $F \cdot P$. En déduire l'image de la famille $\mathcal{B}$, rang f , $\dim \ker f$ et des bases de $\text{im } f$ et $\ker f$.
- (c) [1.5 pt] Calculer la matrice F' de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
- (d) [1.5 + 1 pt bonus] Reprendre la question (b) avec P remplacée par la matrice Q de la famille $\mathcal{B}' = ((2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2))$.

Exercice 4. [3.5 pts] Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y - 2z & = 1 \\ -2x - 3y + 6z - t & = 2 \\ x + y - 4z & = m \\ -y - 2z - 4t & = 1 \end{cases}$$

en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$.