Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et d'Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS
Module MIP2

2^{e} semestre 2003

Examen de Mathématiques 2 — mai 2003

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Première partie : Analyse

NB : TRAITER UN SEUL, AU CHOIX, PARMI LES EXERCICES 1 ET 2 !

Exercice 1. On considère la fonction numérique $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$.

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Rappeler les conditions vérifiées par $x \mapsto \tan x$, autorisant le changement de variables $t = \tan x$ sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
Effectuer ce changement de variables pour exprimer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (sur I) en termes d'une intégrale indéfinie d'une fraction rationnelle.

(c) Trouver une primitive de la fraction rationnelle

$$g(t) = \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} \ ,$$

en précisant son domaine de définition.

(d) Déduire, de ce qui précède, une primitive de f sur I.

Exercice 2. On se propose dans cet exercice de comparer les developpements limités d'ordre 4 en 0 des fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+\tan x} \quad \text{et} \quad F : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln(1+\sin 2x) \ .$$

(a) Retrouver le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \tan x$ à partir du $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sin x$ et du $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos x$. En utilisant le $DL_4(0)$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, déterminer enfin le $DL_4(0)$ de f donnée ci-dessus.

(b) Rappeler le $DL_4(0)$ de $t \mapsto \ln(1+t)$, puis calculer le $DL_4(0)$ de F.

(c) Comparer les $DL_4(0)$ des fonctions f et F. Que peut-on remarquer ?
Est-ce que cela permet de déduire une relation entre f et F en dehors du voisinage de 0 ? (Justifiez votre réponse !)

(d) Vérifier qu'on a $F' = f$ et $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin(2x) = \dfrac{(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x}$.

Exercice 3. (a) Résoudre, sur $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, l'équation différentielle

$$(\sin x + \cos x)\, y' - (\cos x)\, y = (\sin x + \cos x)^{\frac{3}{2}} \ . \qquad (E)$$

(On peut utiliser le résultat du (2d).)

(b) Quelle est la solution de (E), notée f, vérifiant $f(0) = -1$?

Tournez la page, S.V.P. ! $\Longrightarrow$

Exercice 4. Déterminer les points doubles (ou multiples) et la nature des points stationnaires de la courbe paramétrée

$$(C) : \begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = 1 + \sin 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Deuxième partie : Algèbre linéaire

Exercice 5. (Questions de cours.) (Justifiez vos réponses !)

(a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3)$. Est-ce que f peut être injective ? surjective ?

(b) Soit $\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \} \subset \mathbb{R}^4$ tel que $f(v_1) = (1, 1, 1)$, $f(v_2) = (1, 2, 3)$, $f(v_3) = (0, 1, 2)$, $f(v_4) = (0, 0, 1)$.
Déterminer le rang de f, ainsi que la dimension de son noyau, $\ker f$.

(c) Que peut-on dire des familles (v_2, v_3, v_4), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_2, v_3) ?
Est-ce que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être une base de $\mathbb{R}^4$?

(d) Montrer que $\operatorname{vect}\{ v_2, v_3, v_4 \}$ est un supplémentaire de $\ker f$.
Au cas ou $v_1 \notin \operatorname{vect}\{ v_2, v_3 \}$, donner une base de $\ker f$.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré inféreur ou égal à 3, on considère les polynômes

$$P_1 = (X-2)(X-3)(X-4) \ , \ P_2 = (X-1)(X-3)(X-4) \ ,$$
$$P_3 = (X-1)(X-2)(X-4) \ , \ P_4 = (X-1)(X-2)(X-3) \ .$$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est libre.
(Considérer $\sum \lambda_i P_i(x)$ pour $x = 1, 2, 3, 4$.)
Peut-on déduire que c'est une base de E ?

(b) Calculer $\Delta_{ij} = P_i - P_j$ pour $(ij) \in \{ 21, 31, 41, 32, 42, 43 \}$ (sans développer les produits).

(c) On admettra que l'opérateur dérivée, $D : \sum_{k=0}^{3} a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^{3} k a_k X^{k-1}$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
Déterminer $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{F}} D$, la matrice de D dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4).
(Calculer $D(P_i)$ sans développer les produits, et l'exprimer en termes des Δ_{ij} du (6b).)

(d) Trouver les solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix} -11 & -6 & -3 & -2 \\ 6 & -3 & -6 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

(On peut utiliser la méthode de Gauss, ou étudier l'équation correspondante dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, auquel cas on pourra considérer les combinaisons linéaires $\frac{1}{3}\Delta_{41} \pm \Delta_{32}$.)

* * * Fin * * *