Examen de Mathématiques 2 — juin 2004

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

PREMIÈRE PARTIE : ANALYSE

- Exercice 1.** (a) Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$.
- (b) Décomposer en éléments simples la fonction $g(x) = \frac{x^3 + 5}{x(x^2 - 2x + 5)}$.
- (c) Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- (d) En déduire une primitive de $h(t) = \frac{e^{3t} + 5}{e^{2t} - 2e^t + 5}$.
- (e) Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle

$$ty' + \frac{1}{2}y = \frac{e^{3t} + 5}{e^{2t} - 2e^t + 5} \sqrt{t}.$$

Exercice 2. Déterminer la nature des points stationnaires de la courbe paramétrée

$$(C) : \begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

DEUXIÈME PARTIE : ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique. En notant P' le polynôme dérivé de P , on pose

$$f(P) = P' - P \quad \text{pour tout polynôme } P \text{ de } E.$$

- (a) i. Montrer que l'application f est un endomorphisme de E .
- ii. Ecrire $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire, sans autre calcul, le rang, le noyau, et une base de l'image de f .
- (b) On considère le sous-ensemble $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.
- i. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , déterminer la dimension de F , et en donner une base.
- ii. Déterminer une base de $f(F)$, image de F par l'application f .
- (c) On pose $P_1 = 1 - X$, $P_2 = X - X^2$, et $P_3 = X^2 - 1$. Déterminer le rang de $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3)$, matrice de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique $\mathcal{B}$, puis en déduire la dimension de $G = \text{vect}\{P_1, P_2, P_3\}$.
- (d) Soient $Q_0, Q_1, Q_2 \in E$ tels que $f(Q_i) = X^i$ pour $i = 0, 1, 2$.
- i. Justifier le fait que $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ forme une base de E .
- ii. Déterminer la matrice de f dans cette base. (On pourra chercher le lien entre les matrices $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.)