Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et d'Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS
Module MIP2

2^{e} semestre 2002

Examen de Mathématiques 2 — juin 2002

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Première partie : Analyse

Exercice 1. (a) On considère la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{2\,x^2+1}{x^3\,(x^2+x+1)}$$

i. Effectuer la division euclidienne de $1+2\,x^2$ par $1+x+x^2$ suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 (pour avoir un reste $o(x^2)$).

ii. En déduire la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}$.

iii. Calculer la primitive $\displaystyle\int F(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. (a) Résoudre sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle

$$x\,y' - 2\,y = x^3 \sin x \ . \qquad (E)$$

(b) Quelle est la solution de (E), notée f, vérifiant $f(\frac{\pi}{2}) = 1$?

Exercice 3. Soit la courbe (C) du plan affine définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x(t) = t\,\mathrm{sh}\,t = t\,\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y(t) = 1 - \dfrac{1}{2}\,t^2 + \dfrac{1}{4}\,t^4 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction x .

(b) Montrer que (C) admet un point stationnaire, puis déterminer sa nature. [On *peut* déduire les dérivées à partir des D.L..]

(c) Etudier les branches infinies (arcs infinis) de (C).

(d) Donner les points multiples de (C). (Penser aux symétries de (C).)

(e) Etablir le tableau de variation des applications coordonnées x et y .

(f) Tracer (C).

Tournez la page, S.V.P. ! $\Longrightarrow$

Deuxième partie : Algèbre linéaire

Exercice 4. (Question de cours.)

Donner la définition du rang d'une application linéaire, puis énoncer le théorème du rang.

Exercice 5. Soient

$$u_1 = (-1,-2,0,-1)\ ;\ u_2 = (3,3,-2,-2)\ ;\ u_3 = (1,0,-1,-1)\ ;\ u_4 = (-1,1,2,4)$$

quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $E = \mathrm{vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.
Donner une base de E formée de vecteurs de $\{\,u_1,u_2,u_3,u_4\,\}$.

Exercice 6. $\mathbb{R}^4$ étant muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le rang de f.

(b) On considère les vecteurs

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2\ ;\quad \varepsilon_2 = e_1 + e_2 + e_3\ ;\quad \varepsilon_3 = e_2 + e_3 + e_4\ ;\quad \varepsilon_4 = e_3 + e_4\ .$$

  i. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ est libre.
  En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

  ii. Calculer $f(\varepsilon_1)$; $f(\varepsilon_2)$; $f(\varepsilon_3)$; $f(\varepsilon_4)$.
  En déduire la matrice A' de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

(c) i. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

  ii. Calculer P^{-1} (on pourra exprimer directement e_1, e_2, e_3, e_4 en fonction de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4).

(d) i. Exprimer A en fonction de A', P et P^{-1} (sans faire de calcul).

  ii. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P\,A'\,P^{-1})^n = P\,A'^n\,P^{-1}$.

  iii. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

* * * Fin * * *