Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS
Module MIP2
2e semestre 2004

Examen de Mathématiques 2 — juin 2004

∗ ∗ ∗ Barème et indications pour la solution ∗ ∗ ∗

Durée : 3 heures — Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Première partie : Analyse [12 pts]

Exercice 1. (a) Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2\,x + 5}$.

Solution: $x^2 - 2\,x + 5 = (x-1)^2 + 4 = 4\,[(\frac{x-1}{2})^2 + 1]$, d'où
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2+1}\frac{\mathrm{d}x}{2} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + \mathrm{C}.$ [1.0 pts]

(b) Décomposer en éléments simples la fonction $g(x) = \dfrac{x^3+5}{x\,(x^2 - 2\,x + 5)}$.

Solution: $g(x) = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{x^2 - 2\,x + 5}$ avec $A = \lim\limits_{x\to 0} x\,g(x) = \frac{5}{5} = 1$, $Bx + C = (g(x) - 1 - \frac{1}{x})(x^2 - 2\,x + 5) = \frac{1}{x}[x^3 + 5 - (x+1)(x^2 - 2\,x + 5)] = x - 3.$ [1.5 pts]

(c) Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Solution: $G(x) = \int g(x)\,\mathrm{d}x = \int [1 + \ln x + \frac{1}{2}\frac{2\,x-2}{x^2-2\,x+5} - \frac{2}{x^2-2\,x+5}]\,\mathrm{d}x$
$= x + \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2\,x + 5) - \arctan\frac{x-1}{2} + C.$ [1.0 pts]

(d) En déduire une primitive de $h(t) = \dfrac{e^{3\,t} + 5}{e^{2\,t} - 2\,e^t + 5}$.

Solution: Pour $x = e^t,\ \mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$, $\int h(t)\frac{1}{e^t}\,e^t\,\mathrm{d}t = \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) = G(e^t)$. [0.5 pts]

(e) Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle

$$t\,y' + \frac{1}{2}\,y = \frac{e^{3\,t} + 5}{e^{2\,t} - 2\,e^t + 5}\sqrt{t}\ .$$

Solution: $(EH) \implies \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2t} \implies \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln t + C \implies y = K\,t^{-\frac{1}{2}},\ K \in \mathbb{R}.$
Var. de la cte : $t\,k'(t)\,t^{-\frac{1}{2}} = h(t)\sqrt{t}$, soit $k'(t) = h(t)$, d'où $k(t) = G(e^t)$
et enfin $y = t^{-\frac{1}{2}}(G(e^t) + K),\ K \in \mathbb{R}.$ [2.0 pts]

Exercice 2. Déterminer la nature des points stationnaires de la courbe paramétrée

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \quad ,\quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Solution: On a $x' = 3\sin^2 t\cos t,\ y' = -2\sin t\cos t$, qui s'annulent pour $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Les fonctions étant 2π périodiques et x impaire et y paire, on peut se restreindre à $\mathbb{R}_+ \cap [-\pi, \pi[= [0, \pi[$, donc à $t_0 = 0$ et $t_1 = \frac{\pi}{2}$. [1.25 pts]
Etudions $M(0) = (0, 1)$. On a $x'' = 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t$,
$y'' = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t = 2 - 4\cos^2 t$, donc $\vec{V}^{(2)}(0) = (0, -2) \neq o$, d'où $p = 2$,
et $x''' = 6\cos^3 t - (12 + 9)\sin^2 t\cos t,\ y''' = 8\sin t\cos t$, donc $\vec{V}^{(3)}(0) = (6, 0)$.
$\vec{V}^{(3)}(0) \not\parallel \vec{V}^{(2)}(0)$, d'où $q = 3$: $M(0)$ est pt de rebroussement de 1e espèce. [2.5 pts]
Concernant $M(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$, on a $\vec{V}^{(2)}(\frac{\pi}{2}) = (-3, 2) \neq o$ d'où $p = 2$, et

$\vec{V}^{(3)}(\frac{\pi}{2}) = (0,0) \in \mathbb{R} \cdot \vec{V}^{(2)}(\frac{\pi}{2})$, il faut donc chercher $\vec{V}^{(4)}(\frac{\pi}{2})$: $y'''' = -4y''$ et $x'''' = 21 \sin^3 t - (42+18) \sin t \cos^2 t$, d'où $\vec{V}^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = (0,-8) \notin \mathbb{R} \cdot \vec{V}^{(2)}(\frac{\pi}{2})$, donc $q = 4$ et $M(\frac{\pi}{2})$ est pt de rebroussement de 2e espèce. [2.25 pts]

N.B.: On peut aussi faire un DL_4 en 0 et $\frac{\pi}{2}$ (sin $\leftrightarrow$ cos) pour obtenir $\vec{V}^{(2,3,4)}$.

Deuxième partie : Algèbre linéaire [10 pts]

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique.
En notant P' le polynôme dérivé de P, on pose

$$f(P) = P' - P \quad \text{pour tout polynôme } P \text{ de } E\,.$$

(a) i. Montrer que l'application f est un endomorphisme de E.

Solution: On a $f(E) \subset E$ car $\deg(P'-P) = \deg P$, et linéarité : $f(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)' - (P+\lambda Q) = P' - P + \lambda(Q' - Q) = f(P) + \lambda f(Q)$. [1.0 pts]

ii. Ecrire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire, sans autre calcul, le rang, le noyau, et une base de l'image de f.

Solution: Avec $f(1, X, X^2) = (-1, 1-X, 2\,X - X^2)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ [1.0 pts]
qui est de rang 3 (échelonnée sans ligne nulle),
donc $\operatorname{rang} f = 3$ donc f bijective et $\ker f = \{\,o\,\}$, $\operatorname{im} f = E$ dont $(1, X, X^2)$ est une base. [1.75 pts]

(b) On considère le sous-ensemble $F = \{\, P \in E \mid P(1) = 0 \,\}$.

i. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer la dimension de F, et en donner une base.

Solution: On a $F = \ker(P \mapsto P(1))$, noyau d'une forme linéaire, donc s.e.v. F contient $P_1 = 1 - X$ et $P_2 = X - X^2$ qui sont indépendants, donc $\dim F \geq 2$, $1 \notin F$ donc $\dim F < \dim E = 3$ donc $\dim F = 2$ et (P_1, P_2) base de F. [2.0 pts]

ii. Déterminer une base de $f(F)$, image de F par l'application f.

Solution: On a $\operatorname{im} f = \operatorname{vect} f(P_1, P_2)$, et $f(P_1) = -2 + X$ et $f(P_2) = 1 - 3\,X + X^2$ sont indépendants, donc base. [1.0 pts]

(c) On pose $P_1 = 1 - X$, $P_2 = X - X^2$, et $P_3 = X^2 - 1$. Déterminer le rang de $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3)$, matrice de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique $\mathcal{B}$, puis en déduire la dimension de $G = \operatorname{vect}\{P_1, P_2, P_3\}$.

Solution: En faisant $c_3 + c_2 + c_1$, on voit que $\operatorname{rang} M = 2 = \dim G$ car $\operatorname{rang} \mathrm{Mat}(P_1, P_2, P_3) = \operatorname{rang}(P_1, P_2, P_3) \equiv \dim \operatorname{vect}(P_1, P_2, P_3)$. [1.25 pts]

(d) Soient Q_0, Q_1, $Q_2 \in E$ tels que $f(Q_i) = X^i$ pour $i = 0, 1, 2$.

i. Justifier le fait que $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ forme une base de E.

ii. Déterminer la matrice de f dans cette base. (On pourra chercher le lien entre les matrices $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.)

Solution: i. $f(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ est libre donc $\mathcal{C}$ libre, de cardinal $3 = \dim E$ donc base. [0.5 pts]
ii. On a $f(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, d'où $A\,Q = I$, donc $A = Q^{-1}$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, f = Q^{-1} A\, Q = A$. [1.5 pts]