Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2003-2004

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 6 :
Systèmes linéaires ; Calcul matriciel (suite)

Exercice 0. Revoir les ***définitions et théorèmes du cours.***

- Système linéaire (S) à n équations, p inconnues $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$: $A\,X = B$
  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ X = \mathrm{Mat}_e(x),\ B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \iff f(x) = b,\ f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p; \mathbb{K}^n)$.
- solutions : $\mathcal{S} = f^{-1}(\{b\})$; système incompatible : $\mathcal{S} = \emptyset \iff b \notin \operatorname{im} f$; sinon $\mathcal{S} = x^\circ + \ker f$ avec x° une solution particulière : $f(x^\circ) = b$.
- $\operatorname{rang}(S) := \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$; le s.e.v. $\mathcal{S}_o = \ker f$ de $\dim \mathcal{S}_o = p - \operatorname{rang}(S)$ constitue l'ensemble des solutions du système homogène ($b = o$).
- Système de Cramer : $\operatorname{rang}(S) = n = p \iff f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^p; \mathbb{K}^n)$; admet une solution unique $x = f^{-1}(b) \iff X = A^{-1}B$.
- Résolution : réduite de Gauss de $(A|B) \implies$ système de Cramer de $r = \operatorname{rang}(S)$ équations principales pour r inconnues principales (autres inconnues dans membre de droite, autres équations $0 = 0$ sinon $\mathcal{S} = \emptyset$) ; solution s'écrit alors $x = x^\circ + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ arbitraires (inconnues non principales), $(v_1, ..., v_k)$ base de $\mathcal{S}_o$.

Exercice 1. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

* (a) dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2z = a \\ 5x - 9y + 7z = b \\ 4x - 8y + 10z = c \end{cases} \quad \text{en fonction de } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

(b) dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} 7x + 8y + 3z + 9t = 4 \\ -x + y - 3z + 5t = 3 \\ 8x + 9y + 6z + 5t = 2 \\ \quad - 8y + z - 6t = 1 \end{cases}$$

* **Exercice 2.** Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel a le système :

$$\begin{cases} a\,x + y + z = a \\ x + a\,y + z = a \\ x + y + a\,z = a \end{cases}$$

Exercice 3. Soient $u = (1,1,2),\ v = (1,-1,1),\ w = (1,5,4)$ trois vecteurs du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Trouver les conditions sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $xu + yv + zw = (a,b,c)$.

Exercice 4. Résoudre le système

$$\begin{cases} -x - 6y + 8z + 5t + 3u = -6 \\ 2x - 5y + 5z - 2t - 3u = 3 \\ 3x + 9y + 9z + t + 5u = -4 \\ x - 9y - 5z - 6t - 9u = 10 \end{cases}$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $f(b_i)$ pour $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (0, 2, -1)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

(b) i. Démontrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Déterminer $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. En déduire que f est bijective.

(c) i. Calculer N^2 pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire N^k pour $k \geq 2$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T^n en termes de N, puis explicitement (en fonction de n). Exprimer A en termes de T, et en déduire A^n.

Exercice 6. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère l'application φ qui à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\varphi(M) = \begin{pmatrix} a-b & d-c \\ c-d & b-a \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme.

(b) Touver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Donner des bases $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$ des sous-espaces $F = \operatorname{im}\varphi$ et $K = \ker\varphi$.

(d) Ecrire la matrice de $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}(F) : M \mapsto \varphi(M)$ dans la base $\mathcal{F}$ de F.

Exercice 7. Dans $E = \mathbb{R}_1[X]$, on considère les polynômes $P_1 = X + 1$ et $P_2 = 1 - X$. Montrer qu'ils forment une base de E.
Ecrire la matrice M de l'application linéaire $D : P \mapsto P'$ dans cette base (où P' désigne la dérivée de P). Montrer de deux façons différentes que $M^2 = 0$.

Exercice 8. (a) Soit $b_1 = (2, 3, -5)$, $b_2 = (1, 2, -3)$, $b_3 = (3, -4, -2)$. Montrer que $(b) = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $U(x, y, z) = (3\,y - 5\,z, 3\,x - y - 3z, 2\,x + y)$. Trouver la matrice de U dans la base (b).

(c) Soit (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit $w_1 = f_1 - f_2$; $w_2 = f_1 + f_2$. Vérifier que $(w) = (w_1, w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

* (d) Soit $V \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $V(x, y, z) = (2\,x - y + z, x - 4\,y - 2\,z)$. Trouver la matrice de V par rapport aux bases (b) et (w).

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère la famille (u, v, w) avec $u = (-1, 1, 1)$; $v = (1, -1, 1)$; $w = (1, 1, -1)$.

(a) Calculer les coordonnées (x, y, z) du vecteur $\xi\,u + \eta\,v + \zeta\,w$ dans la base canonique en fonction de ξ, η, ζ.

(b) Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées (ξ, η, ζ) du vecteur $x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ dans la base (u, v, w).