

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 5 :
Calcul matriciel

Exercice 0. Revoir les *définitions* et *résultats* du cours :

- Matrice $n \times p$, ligne, colonne, carrée d'ordre n , transposée, (anti)symétrique, triangulaire supérieure et inférieure, diagonale, scalaire, unité (= identité).
- Matrice d'une famille $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$, d'une application linéaire $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, matrice de passage, réduite de Gauss / Gauss-Jordan d'une matrice.
- Produit de deux matrices A et B : associatif et bilinéaire ; ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$; matrices inversibles : $\text{GL}_n(\mathbb{K})$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Rang d'une matrice, $\text{rg } A = \text{rg } {}^tA$, invariant sous opérations élémentaires (lignes et colonnes) ; A inversible ssi $\text{rg } A = n = p$ ssi A matrice d'une base ssi A matrice d'un isomorphisme.
- Image d'un vecteur x : $\text{Mat}_{\mathcal{C}} f(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} f \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}} x$, idem pour famille ; d'où base de $\text{im } f$ à partir des colonnes de $\text{Mat } f$. $\text{Mat}(f \circ g)$.
- $\ker f$ à partir de la réduite de Gauss-Jordan de $\text{Mat } f$: supprimer lignes nulles et insérer lignes $\ell_i = (-\delta_{ij})_j$ pour obtenir matrice carrée avec ± 1 sur la diagonale : colonnes des -1 donnent alors base de $\ker f$.

* **Exercice 1.** On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins cinq.
- Parmi les matrices A, B, C, D, E et leurs produits, lesquelles sont carrées et lesquelles sont symétriques ?

Exercice 2. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées antisymétriques d'ordre n est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Le produit de deux matrices antisymétriques est-il (anti-)symétrique ?

Exercice 3. Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques sont des s.e.v. supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (Indication : considérer $\frac{1}{2}(A \pm {}^tA)$.)

Exercice 4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \cdot B = 0$. Si l'une des matrices est non-nulle, montrer (par l'absurde) que l'autre n'est pas inversible.

* **Exercice 5.** Calculer le produit de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

En déduire A^{-1} lorsque le *déterminant* $\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} ad - bc$ est non-nul.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la famille $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

des matrices E_{ij} ayant tous les éléments nuls sauf celui situé sur la i^e ligne dans la j^e colonne, qui vaut 1. Ainsi toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

s'écrit de façon unique $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$. (1)

(a) Montrer que

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{il} & \text{si } j = k \end{cases}.$$

(b) Calculer et interpréter les produits $A \cdot E_{ij}$ et $E_{ij} \cdot A$.

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $P_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ ($I = I_n =$ matrice unité). Déduire du (6b) une interprétation des produits $A \cdot P_{ij}(\lambda)$ et $P_{ij}(\lambda) \cdot A$.

(d) Déduire de la question précédente une expression de la matrice inverse de $P_{ij}(\lambda)$, c'est-à-dire $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $P_{ij}(\lambda) \cdot Q = Q \cdot P_{ij}(\lambda) = I$, et confirmer le résultat par calcul explicite, en développant ces produits.

* **Exercice 7.** Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a-c & -b & c \\ -b & a-2c & b \\ c & b & a-c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Montrer que $M(a, b, c)$ peut s'écrire $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$ où $I = I_3$, J et K étant indépendants de a, b et c . En déduire que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont on donnera la dimension.

(b) Calculer J^2, JK, KJ, K^2 en fonction de I, J et K . En déduire que E est stable pour la multiplication matricielle.

INVERSION DE MATRICES, MÉTHODE DE GAUSS

* **Exercice 8.** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 . Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 -$

λA soit scalaire. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 9. Rappelons qu'une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible P .

(a) Supposons connue une suite de telles opérations (correspondantes à $P_1, \dots, P_k \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$) qui, appliquées à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donnent la matrice unité $I = I_n$.

Déduire l'inverse de A en terme des P_i .

(b) Qu'obtient-on en appliquant les mêmes opérations à la matrice I_n ?

En déduire une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice.

(Disposition pratique : on travaille sur la « matrice étendue » $(A | I)$.)

* (c) Application : inverse des matrices suivantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$