Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2002-2003

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés$^{(*)}$, série 5 :
Calcul matriciel

(RP) **Exercice 44.** Revoir ***les définitions du cours :***

- Matrice $n \times p$, ligne, colonne, carrée d'ordre n, triangulaire supérieure et inférieure, diagonale, scalaire, unité (= identité), (anti)symétrique, transposée.
- Produit de deux matrices A et B ; matrices inversibles : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Matrice d'une famille $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_p)$, d'une application linéaire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, matrice de passage, rang d'une matrice, réduite de Gauss d'une matrice.

(RP) **Exercice 45.** Revoir ***les résultats du cours :***

- Produit de matrices associatif et bilinéaire ; ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$; $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$ invariant sous opérat° élém. (lignes et colonnes) ; A inversible ssi $\mathrm{rg}\, A = n = p$ ssi matrice d'une base ssi matrice d'un isomorphisme ; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Image d'un vecteur x : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, f(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, f \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x$, idem pour famille ; d'où base de $\mathrm{im}\, f$ à partir des colonnes de $\mathrm{Mat}\, f$.
- $\ker f$ à partir de la réduite de Gauss de f : insérer lignes $\ell_i = (-\delta_{ij})_j$ (et supprimer lignes nulles) pour obtenir matrice carrée avec ± 1 sur la diagonale, colonnes des -1 donnent alors base de $\ker f$.

(AD) **Exercice 46.** On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins cinq.

(b) Parmi les matrices A, B, C, D, E et leurs produits, lesquelles sont carrées et lesquelles sont symétriques ?

(AD) **Exercice 47.** (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées antisymétriques d'ordre n est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

(b) Le produit de deux matrices antisymétriques est-il (anti-)symétrique ?

(EX) **Exercice 48.** Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques sont des s.e.v. supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (Indication : considérer $\frac{1}{2}(A \pm {}^tA)$.)

(EX) **Exercice 49.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \cdot B = 0$. Si l'une des matrices est non-nulle, montrer (par l'absurde) que l'autre n'est pas inversible.

(AD) **Exercice 50.** Calculer le produit de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

En déduire A^{-1} lorsque le *déterminant* $\det(A) \overset{\text{def}}{=} ad - bc$ est non-nul.

$^{(*)}$ RP = **révision** du cours / **préparation** du T.D. (obligatoire; revu en T.D. seulement sur demande !) ; AD = **application directe** du cours ; EX = **exercice** ; PB = **problème**.

(EX) **Exercice 51.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la famille $(E_{ij})_{i,j=1\dots n}$ des matrices E_{ij} ayant tous les éléments nuls sauf celui situé sur la i^e ligne dans la j^e colonne, qui vaut 1. Ainsi toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique
$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, E_{ij} \ . \tag{1}$$

(a) Montrer que
$$E_{ij} \cdot E_{k\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ E_{i\ell} & \text{si} \quad j = k \end{cases} .$$

(b) Calculer et interpréter les produits $A \cdot E_{ij}$ et $E_{ij} \cdot A$.

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $P_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ $\;(I = I_n =$ matrice unité). Déduire du (51b) une interprétation des produits $A \cdot P_{ij}(\lambda)$ et $P_{ij}(\lambda) \cdot A$.

(d) Déduire de la question précédente une expression de la matrice inverse de $P_{ij}(\lambda)$, c'est-à-dire $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $P_{ij}(\lambda) \cdot Q = Q \cdot P_{ij}(\lambda) = I$, et confirmer le résultat par calcul explicite, en développant ces produits.

(EX) **Exercice 52.** Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme
$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix} , \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 .$$

(a) Montrer que $M(a,b,c)$ peut s'écrire $M(a,b,c) = aI + bJ + cK$ où $I = I_3$, J et K étant indépendants de a, b et c. En déduire que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel dont on donnera la dimension.

(b) Calculer J^2, JK, KJ, K^2 en fonction de I, J et K. En déduire que E est stable pour la multiplication matricielle.

Inversion de matrices, Méthode de Gauss

(AD) **Exercice 53.** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ -2 & -4 & -5 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 - \lambda\, A$ soit scalaire. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

(EX) **Exercice 54.** Rappelons qu'une opération élementaire sur les lignes d'une matrice correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible P.

(a) Supposons connue une suite d'opérations (soit $P_1, ..., P_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) qui, appliquées à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donnent la matrice unité $I = I_n$. Déduire l'inverse de A en terme des P_i.

(b) Qu'obtient-on en appliquant les mêmes opérations à la matrice I_n ? En déduire une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice. (Disposition pratique : on travaille avec la matrice étendue $(A|I)$.)

(c) Application : inverse des matrices suivantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(EX) **Exercice 55.** Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 5 \\ -2 & -22 & -9 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $f(b_i)$ pour $b_1 = (1, -1, 2)$, $b_2 = (0, -2, 4)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

(b) i. Démontrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Déterminer $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. En déduire que f est bijective.

(c) i. Calculer N^2 pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire N^k pour $k \geq 2$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T^n en fonction de n et N, puis en fonction de n uniquement. En déduire A^n en fonction de n.

(EX) **Exercice 56.** Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère l'application φ qui à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\varphi(M) = \begin{pmatrix} a-b & d-c \\ c-d & b-a \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme.

(b) Touver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Donner des bases $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$ des sous-espaces $F = \operatorname{im}\varphi$ et $K = \ker\varphi$.

(d) Ecrire la matrice de $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}(F) : M \mapsto \varphi(M)$ dans la base $\mathcal{F}$ de F.

(EX) **Exercice 57.** Dans $E = \mathbb{R}_1[X]$, on considère les polynômes $P_1 = X + 1$ et $P_2 = 1 - X$. Montrer qu'ils forment une base de E.
Ecrire la matrice M de l'application linéaire $D : P \mapsto P'$ dans cette base (où P' désigne la dérivée de P). Montrer de deux façons différentes que $M^2 = 0$.

(AD) **Exercice 58.**

(a) Soit $b_1 = (5, 3, -3)$, $b_2 = (5, 0, -1)$, $b_3 = (2, 1, -1)$. Montrer que $(b) = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $U(x, y, z) = (5\,y - 3\,z, x - 3\,y - 3z, 2\,y + z)$. Trouver la matrice de U dans la base (b).

(c) Soit (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit $w_1 = f_1 + f_2$; $w_2 = f_1 - f_2$. Vérifier que $(w) = (w_1, w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

* (d) Soit $V \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $V(x, y, z) = (x - 4\,y + 3\,z, 2\,x - 4\,y - z)$. Trouver la matrice de V par rapport aux bases (b) et (w).

Exercice 59. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère la famille (u, v, w) avec $u = (1, 1, -1)$; $v = (1, -1, 1)$; $w = (-1, 1, 1)$.

(a) Calculer les coordonnées (x, y, z) du vecteur $\xi\,u + \eta\,v + \zeta\,w$ dans la base canonique en fonction de ξ, η, ζ.

(b) Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées (ξ, η, ζ) du vecteur $x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ dans la base (u, v, w).

Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2002-2003

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés$^{(*)}$, série 6 :
Systèmes linéaires

(RP) **Exercice 60.** Revoir les ***définitions et théorèmes du cours.***

- Système linéaire (S) à n équations, p inconnues $(x_1,...,x_p) \in \mathbb{K}^p$: $A\,X = B$
  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ X = \mathrm{Mat}_e(x),\ B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \iff f(x) = b,\ f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p;\mathbb{K}^n)$.
- solutions : $\mathcal{S} = f^{-1}(\{b\})$; système incompatible : $\mathcal{S} = \emptyset \iff b \notin \operatorname{im} f$; sinon $\mathcal{S} = x^\circ + \ker f$ avec $f(x^\circ) = b$ une solution particulière.
- $\operatorname{rang}(S) := \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$; le s.e.v. $\mathcal{S}_o = \ker f$ de $\dim \mathcal{S}_o = p - \operatorname{rang}(S)$ constitue l'ensemble des solution au système homogène ($b = o$).
- Système de Cramer : $\operatorname{rang}(S) = n = p \iff f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^p;\mathbb{K}^n)$; admet une solution unique $x = f^{-1}(b) \iff X = A^{-1}B$.
- Résolution : réduite de Gauss de $(A|B) \implies$ système de Cramer de $r = \operatorname{rang}(S)$ équations principales pour r inconnues principales (autres inconnues dans membre de droite, autres équations $0 = 0$ sinon $\mathcal{S} = \emptyset$) ; solution s'écrit alors $x = x^\circ + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ avec $\lambda_1,...,\lambda_k \in \mathbb{K}$ arbitraires (inconnues non principales), $(v_1,...,v_k)$ base de $\mathcal{S}_o$.

Exercice 61. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

* (a) dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 9z = a \\ 6x - 9y + 7z = b \\ 5x - 2y + 9z = c \end{cases} \quad \text{en fonction de } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

(b) dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x + 2y + 2t = 1 \\ -x - y + z - t = -2 \\ 2x + y - z + 2t = 3 \\ -x + 3y + z - 2t = 4 \end{cases}$$

Exercice 62. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel a le système :

$$\begin{cases} (a-1)x + y + z = a^2 + a \\ x + (a-1)y + z = a^3 + a^2 \\ x + y + (a-1)z = a^4 + a^3 \end{cases}$$

Exercice 63. Soient $u = (1,3,2),\ v = (1,-1,1),\ w = (1,7,3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Trouver les conditions sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $xu + yv + zw = (a,b,c)$.

* **Exercice 64.** Résoudre le système

$$\begin{cases} y - z + 5t - 2u = 1 \\ 2x + y + 2z + 4t + u = 4 \\ 2x + 3z - t + 3u = 3 \\ x + 3y + 4t - 3u = 3 \end{cases}$$

$^{(*)}$ RP = **révision** du cours / **préparation** du T.D. (obligatoire; revu en T.D. seulement sur demande !) ; AD = **application directe** du cours ; EX = **exercice** ; PB = **problème**.