Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP 2
2^e semestre 2003–2004

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n^o 4 :

Courbes paramétrées.

Exercice 1. Etudier les points stationnaires de la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \ : \ \begin{cases} x(t) & = & t\, e^{-1/t} \\ y(t) & = & (t+1)\, e^{1/t} \end{cases}$$

Exercice 2. Etudier les points stationnaires de la courbe définie par les équations :

$$\mathcal{C} \ : \ \begin{cases} x(t) & = & \frac{1}{5}\, t^5 - \frac{1}{6}\, t^6 \\ y(t) & = & \frac{1}{5} t^5 - \frac{3}{8}\, t^4 + \frac{1}{6}\, t^3 \end{cases}$$

Exercice 3. Etudier au voisinage du point $(x(0), y(0))$, la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{t^2}{1+t} \\ y(t) & = & \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} \end{cases}$$

Exercice 4. Faire une étude locale au voisinage du point stationnaire pour :

$$\begin{cases} x(t) & = & \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^2+1}\, \mathrm{d}u \\ y(t) & = & \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^3+1}\, \mathrm{d}u \end{cases}$$

Exercice 5. Soit (C) la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = -2\,t + e^{2\,t} \\ y(t) = 2 + t^2 - \frac{1}{2} t^4 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Montrer que (C) admet un point stationnaire, puis déterminer sa nature.

(b) Etudier les branches infinies (arc infinis) de (C).

(c) Etablir le tableau de variations des applications coordonnées x et y.

(d) i. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $M(0)$.
  ii. Calculer le $DL_3(0)$ de $f(t) = \frac{1}{2} + t + t^2 - \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{2} e^{2\,t}$.
  iii. Donner la position de (C) par rapport à (T) au voisinage de $M(0)$.

§ (e) En utilisant les propriétés de monotonie de x et y, montrer qu'il existe un unique point double sur l'arc entre $M(0)$ et $M(1)$.
[Considérer aussi les points $M(-1)$ et $M(-2)$.]

(f) Tracer soigneusement la courbe (C). (Prendre $e^2 = 7,4$ et $e^{-2} = 0,15$.)