Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP 2
2^e semestre 2001–2002

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 4 :

Courbes paramétrées.

Exercice 1. Etudier les points stationnaires de la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \ : \ \begin{cases} x(t) = t\, e^{-1/t} \\ y(t) = (t+2)\, e^{1/t} \end{cases}$$

Exercice 2. Etudier les points stationnaires de la courbe définie par les équations :

$$\mathcal{C} \ : \ \begin{cases} x(t) = \frac{1}{6}\, t^6 - \frac{1}{5}\, t^5 \\ y(t) = \frac{1}{5} t^5 - \frac{3}{8}\, t^4 + \frac{1}{6}\, t^3 \end{cases}$$

Exercice 3. Etudier au voisinage du point $(x(0), y(0))$, la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sqrt{1+t^4}}{1+t} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t} \end{cases}$$

Exercice 4. Faire une étude locale au voisinage du point stationnaire pour :

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^2+1}\, \mathrm{d}u \\ y(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^3+1}\, \mathrm{d}u \end{cases}$$

Exercice 5. Soit (C) la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = -2\,t + e^{2\,t} \\ y(t) = 2 + t^2 - \frac{1}{2} t^4 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Montrer que (C) admet un point stationnaire, puis déterminer sa nature.

(b) Etudier les branches infinies (arc infinis) de (C).

(c) Etablir le tableau de variations des applications coordonnées x et y.

(d) i. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $M(0)$.
   ii. Calculer le $DL_3(0)$ de $f(t) = \frac{1}{2} + t + t^2 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{2}e^{2\,t}$.
   iii. Donner la position de (C) par rapport à (T) au voisinage de $M(0)$.

§ (e) En utilisant les propriétés de monotonie de x et y, montrer qu'il existe un unique point double sur l'arc entre $M(0)$ et $M(1)$.
[Considérer aussi les points $M(-1)$ et $M(-2)$.]

(f) Tracer soigneusement la courbe (C). (Prendre $e^2 = 7,4$ et $e^{-2} = 0,15$.)

Exercices supplémentaires : équations différentielles

Exercice 6. (a) Résoudre sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' + y = e^x \ .(E)$$

(b) Montrer de plus qu'il existe une unique solution de cette équation sur I_1 (resp. I_2) admettant une limite finie en 0.

(c) Peut-on en déduire une solution à (E) sur tout $\mathbb{R}$? (Utiliser des D.L.)

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles proposées :

(a) $x\,y' + 2y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

(b) $y' \cos x - y \sin x = 2x - 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 8. Soit l'équation différentielle :

$$x^2 y' - y = x^2 - x + 1 \ . \qquad (E)$$

Soit F une primitive de la fonction $x \mapsto (1 - \frac{1}{x})\, e^{\frac{1}{x}}$.

(a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$ en fonction de F.

(b) Chercher une solution particulière de (E) sous forme polynômiale.

(c) En déduire une expression de F, puis vérifier le résultat.

Exercice supplémentaire : Suites recurrentes

Exercice 9. Déterminer une formule explicite pour la solution $u = (u_n)$ à l'équation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n \qquad (E)$$

en fonction de $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ donnés, dans chacun des cas suivants :

(a) $x^2 - a\,x - b = 0$ admet deux racines réelles distinctes ρ_1 et ρ_2.

(b) $x^2 - a\,x - b = 0$ admet une racine double ρ.

(c) $x^2 - a\,x - b = 0$ admet deux racines complexes distinctes $\rho e^{i\varphi}$ et $\rho\, e^{-i\varphi}$.