Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2003-2004

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 4 :
Familles libres et bases, applications linéaires dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 0. Revoir ***les théorèmes et définitions importants du cours :***

- Une famille $v = (v_1, ..., v_n)$ est **libre** si on a une des propriétés équivalentes :
(a) aucun v_i s'écrit comme combin. linéaire des autres $\iff$
(b) $\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : (\,\lambda_1\, v_1 + \dots + \lambda_n\, v_n = o \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\,) \iff$
(c) $\Psi_{(v_1,...,v_n)}$ est injective $\iff$ (d) $[v] = [v_1] \oplus \dots \oplus [v_n]$ et aucun v_i est nul.
Toute famille non libre est **liée**.— Le (a) et (c) se généralisent directement à une famille $(v_i)_{i\in I}$ quelconque ; la famille vide est libre par convention.
Une **base** de E est une famille libre et génératrice de E.
- L'**image d'une famille** $v = (v_i)_{i\in I} \in E^I$ par $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la famille $f(v) = (f(v_i))_{i\in I} \in F^I$; elle est libre si v est libre et f injective, génératrice si v est génératrice et f surjective, base si v base et $f \in \mathrm{Iso}(E, F)$.
- Toute partie libre L d'un e.v. E se **complète en une base** de E par des éléments d'une partie génératrice G donnée. Ainsi tout e.v. admet une base, et tout s.e.v. un supplémentaire (en dimension finie).
- Le cardinal de toute base d'un e.v. est le même, c'est la **dimension** de l'e.v. (On se limite ici aux e.v. de dim. finie, c-à-d. engendrés par une partie finie.)
- Le **rang d'une famille** est la dimension du s.e.v. qu'elle engendre.
- Le **rang d'une application** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{im}\, f$;
l'image étant engendrée par l'image d'une base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f(\mathcal{B})$.
- Pour deux s.e.v. F, G on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on a le **théorème du rang** : $\dim \ker f + \mathrm{rg}\, f = \dim E$.

Familles libres et bases

* **Exercice 1.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (3, 1, 4)$ et $v_2 = (2, 7, 1)$.
(a) Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est libre.
(b) Trouver $v_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.
(c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{vect}\, \mathcal{B}$ pour déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (a) Montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est libre dans le $\mathbb{R}$–e.v. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
* (b) Montrer qu'une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si un des deux est un multiple de l'autre. (N'oubliez pas le vecteur nul !)
(c) Montrer que la famille $f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}} = (x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit $\varphi_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ par $\varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.
(Indication : Considérer $P_i = \prod_{j\ne i}(X - a_j)$.)

Exercice 4. Utiliser le pivot de Gauss pour trouver les relations de dépendance entre $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et une base du s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ qu'ils engendrent, pour

* (a) $u_1 = (1, -2, 1, 0)$, $u_2 = (3, -2, 0, 3)$,
$u_3 = (0, -2, 1, -2)$, $u_4 = (1, 0, 2, 4)$.

(b) $u_1 = 3\,e_1 - e_2 - 3\,e_4$, $u_2 = -e_1 - 2\,e_2 + 3\,e_3 - e_4$,
$u_3 = e_1 - 5\,e_2 + 6\,e_3 - 5\,e_4$, $u_4 = 2\,e_1 + 4\,e_2 - 6\,e_3 + 2\,e_4$,
où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. (a) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_k$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{(X + a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
Donner les coordonnées de $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ dans cette base.
[Indication : on peut utiliser $P = Q(X + a) \iff Q = P(X - a)$.]

Dimension et rang ; applications linéaires dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - 2\,y, 3\,y - z)$.

(a) Montrer que f est linéaire.

* (b) Déterminer $\ker f$, et en donner une base. En déduire le rang de f.

* (c) Déterminer une partie génératrice de $\operatorname{im} f$, puis une base de $\operatorname{im} f$.

Exercice 7. (a) Montrer que $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ est linéaire, pour

$$u(x, y, z) = (\,5x + 2y - z\,,\ -8x - 3y + 2z\,,\ -x - 2y + 3z\,,\ 3x - y - 5z\,)\ .$$

(b) Montrer que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

* (c) Déterminer $u(V)$, l'image de V par u.

Exercice 8. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $u(-1, 1, 0) = (1, 1)$, $u(0, 2, 1) = (0, 1)$, $u(1, 0, 1) = (1, 0)$. Calculer $u(x, y, z)$ pour (x, y, z) arbitraire dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. (a) Calculer l'image de $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ par $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ définie par

$$f(e_1) = \alpha\, e_1 + i\, e_2\ ;\quad f(e_2) = 2\, e_1 + e_2\ , f(e_3) = -4\, e_1 + \alpha\, e_3\ ;$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

(b) Déterminer $\ker(f)$, $\operatorname{im}(f)$ ainsi qu'une base pour chacun de ces sev selon les valeurs de α. Préciser, pour chaque cas, le rang de f.

Exercice 10. Soient E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \in E$ tels que $(f(a), f^2(a), ..., f^n(a))$ soit libre. Montrer que $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E et que f est un automorphisme de E.

Exercice 11. Soit F un sev de E. Montrer que si F est de dimension finie, alors pour tout $u \in L(E)$: $F \subset u(F) \Longrightarrow F = u(F)$. Donner un contre-exemple lorsque F n'est pas de dimension finie. (Essayer $u(\sum a_k X^{2k}) = \sum a_k X^k$.)

Exercice 12. (a) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que $E \times F$ est de dimension finie et que $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

(b) Soient F, G s.e.v. de E et $\varphi : F \times G \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$.
Montrer que $\ker \varphi$ est isomorphe à $F \cap G$.
En déduire, avec le (a) : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.