Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2002-2003

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés$^{(*)}$, série 4 :
Familles libres et bases, applications linéaires dans $\mathbb{R}^n$

(RP) **Exercice 31.** Revoir ***les théorèmes et définitions importants du cours :***

- Une famille $v = (v_1, ..., v_n)$ est **libre** si on a une des propriétés équivalentes : $[v] = [v_1] \oplus \cdots \oplus [v_n]$ et $o \notin \{v_1, ..., v_n\} \iff$ aucun v_i s'écrit comme combin. linéaire des autres $\iff \Psi_v : (\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ est injective. (Ceci se généralise à une famille quelconque ; la famille vide est libre par convention.) Une famille non libre est **liée**.
  Une **base** de E est une famille libre et génératrice de E.
- L'image d'une famille $v = (v_i)_{i \in I} \in E^I$ par $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la famille $f(v) = (f(v_i))_{i \in I} \in F^I$; elle est génératrice si v est génératrice et f surjective, libre si v est libre et f injective, base si v base et $f \in \mathrm{Iso}(E, F)$.
- Le cardinal de toute base d'un e.v. est le même, c'est la **dimension** de l'e.v. (On se limite ici aux e.v. de dim. finie, c-à-d. engendrés par une partie finie.)
- Toute partie libre L d'un e.v. E se **complète en une base** de E par des éléments d'une partie génératrice G donnée. Ainsi tout e.v. admet une base, et tout s.e.v. un supplémentaire (en dimension finie).
- Le **rang d'une famille** est la dimension du s.e.v. qu'elle engendre.
- Le **rang d'une application** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de son image. Celle-ci étant engendrée par l'image d'une base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f(\mathcal{B})$.
- Pour deux s.e.v. F, G on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on a **théorème du rang** : $\dim \ker f + \mathrm{rg}\, f = \dim E$.

Familles libres et bases

(AD) **Exercice 32.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (2, 1, 0)$ et $v_2 = (-4, 2, 3)$.

(a) Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est libre.
(b) Trouver $v_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.
(c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{vect}\, \mathcal{B}$ pour déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(EX) **Exercice 33.** (a) Montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est libre dans le $\mathbb{R}$–e.v. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

(AD) (b) Montrer qu'une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si un des deux est un multiple de l'autre. (Attention au vecteur nul !)

(PB) (c) Montrer que la famille $f = (x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$:

(PB) **Exercice 34.** Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit $\varphi_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ par $\varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$. (Indication : Considérer $P_i = \prod_{j \neq i}(X - a_j)$.)

$^{(*)}$ RP = **révision** du cours / **préparation** du T.D. (obligatoire; revu en T.D. seulement sur demande !) ; AD = **application directe** du cours ; EX = **exercice** ; PB = **problème**.

(AD) **Exercice 35.** Utiliser le pivot de Gauss pour trouver les relations de dépendance entre $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et une base du s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ qu'ils engendrent, pour

* (a) $u_1 = (-1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (2, 0, -1, 3)$,
$u_3 = (0, 2, -1, 2)$, $u_4 = (1, 2, 1, 6)$.

(b) $u_1 = e_1 + 2\,e_2 - 3\,e_3 + e_4$, $u_2 = -2\,e_1 + 3\,e_2 - 3\,e_3 + 4\,e_4$,
$u_3 = e_1 - 5\,e_2 + 6\,e_3 - 5\,e_4$, $u_4 = 3\,e_1 - e_2 - 3\,e_4$,
où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base quelconque de $\mathbb{R}^4$.

(EX) **Exercice 36.** (a) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_k$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{(X+a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
(PB) Donner les coordonnées de $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ dans cette base.
[Indiction : on peut utiliser $P = Q(X+a) \iff Q = P(X-a)$.]

Dimension et rang ; applications linéaires dans $\mathbb{R}^n$

(AD) **Exercice 37.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2\,x - y, -6\,x + 2z)$.

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer $\ker f$, et en donner une base. En déduire le rang de f.

(c) Déterminer une partie génératrice de $\operatorname{im} f$, puis une base de $\operatorname{im} f$.

(EX) **Exercice 38.** (a) Montrer que $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ est linéaire, pour

$$u(x, y, z) = (\,4x + 3y - z\,,\; 2x - 5y + 3z\,,\; -x + 2y - 3z\,,\; 2x - y + 5z\,)\ .$$

(b) Montrer que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer $u(V)$, l'image de V par u.

(EX) **Exercice 39.** Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $u(-1, 1, 0) = (1, 1)$, $u(0, 2, 1) = (0, 1)$, $u(1, 0, 1) = (1, 0)$. Calculer $u(x, y, z)$ pour (x, y, z) arbitraire dans $\mathbb{R}^3$.

(EX) **Exercice 40.** (a) Calculer l'image de $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ par $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ définie par

$$f(e_1) = \alpha\,e_1 + 2\,e_2 + 3\,e_3\ ;\quad f(e_2) = i\,e_2 + \alpha\,e_3\ ;\quad f(e_3) = e_2 + 5\,e_3\ ,$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

(b) Déterminer $\ker(f)$, $\operatorname{im}(f)$ ainsi qu'une base pour chacun de ces sev selon les valeurs de α. Préciser, pour chaque cas, le rang de f.

(EX) **Exercice 41.** Soient E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \in E$ tels que $(f(a), f^2(a), ..., f^n(a))$ soit libre. Montrer que $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E et que f est un automorphisme de E.

(AD) **Exercice 42.** Soit F un sev de E. Montrer que si F est de dimension finie, alors pour tout $u \in L(E)$: $F \subset u(F) \Longrightarrow F = u(F)$. Donner un contre-exemple
(EX) lorsque F n'est pas de dimension finie. (Essayer $u(\sum a_k\, X^{2k}) = \sum a_k X^k$.)

(AD) **Exercice 43.** (a) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que $E \times F$ est de dimension finie et que $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

(EX) (b) Soient F, G s.e.v. de E et $\varphi : F \times G \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$. Montrer que $\ker\varphi$ est isomorphe à $F \cap G$ et déduire, avec le (a), $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.