Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Modules MIP 2
2^e semestre 2003–2004

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 3 :
Développements limités.

Généralités ; D.L. de fonctions élémentaires.

Exercice 1. Montrer que : (a) $f \underset{(a)}{=} o(f) \implies f = o$ sur un voisinage de a.

(b) $o(t^2) \underset{(0)}{=} t\,o(t)$; (c) $t^2 + o(t) \underset{(0)}{=} o(t)$; (d) $\frac{1}{1+t+o(t)} \underset{(0)}{=} 1 - t + o(t)$.

Exercice 2. Montrer qu'une fonction polynômiale f de degré d admet un $DL_n(0)$ (développement limité d'ordre n au voisinage de 0), pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$(a)\ \forall x \in \mathbb{R} : |e^x - x - 1| \leq \tfrac{1}{2}\, x^2\, e^{|x|}\ ,\quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}_+ : x - \tfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x\ .$$

Exercice 4. Déterminer le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N})$; idem pour $x \mapsto \operatorname{sh} x$

(b) $x \mapsto e^x \sin x$ $(n = 5)$

(c) $x \mapsto \arctan x$ $(n = 2p + 2$ avec $p \in \mathbb{N})$

Exercice 5. Déterminer les D.L. suivants :

(a) $DL_4(1)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$, (b) $DL_2(\infty)$ de $x \mapsto x - \sqrt[4]{x^4 - x^3}$,

(c) $DL_4(\frac{\pi}{6})$ de $x \mapsto (\sin 2x)^2$.

Exercice 6. On rappelle que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] :\ \arcsin(\sin x) = x$,

$\forall x \in [-1, 1] :\ \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

(a) Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \arcsin x$ à l'aide du D.L. de $x \mapsto \sin x$.

(b) En déduire le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \arccos x$.

Recherche de fonctions équivalentes et limites

Exercice 7. Déterminer un équivalent, au voisinage de x_0, des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \quad (x_0 = 0)\ ,\quad g(x) = 2^x - x^2 \quad (x_0 = 2)\ .$$

Exercice 8. A l'aide de D.L., calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}\ ,\quad \ell_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)\ln x}\ ,\quad \ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\ .$$

Exercice 9. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer à l'aide d'un D.L. la limite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$.

Branches infinies et étude locale de fonctions

Exercice 10. Donner, à l'aide de D.L., au voisinage de ∞ et $-\infty$, l'asymptote et la position par rapport à l'asymptote, de la courbe d'équation $y = \dfrac{x}{1+x}e^{1/x}$.

Exercice 11. A l'aide d'un D.L. étudier la convexité et la concavité locale au voisinage de x_0 ainsi que la nature (extréma, point d'inflexion) du point $(x_0, f(x_0))$, et donner l'équation de la tangente en ce point, pour

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 \quad \text{et} \quad x_0 \in \left\{ -1, \tfrac{1}{2}, 2 \right\} \ .$$

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ par

$$f(x) = \frac{g(x)}{\tan x} \quad \text{avec} \quad g(x) = e^{\sqrt{1+\sin x}} - e \ .$$

(a) Calculer le $DL_3(0)$ de g.

(b) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

(c) Notons $\widetilde{f}$ ce prolongement de f. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0.

(d) Donner l'équation de la tangente (t) au graphe de $\widetilde{f}$ au point $(0, \widetilde{f}(0))$.

(e) Préciser la position du graphe de $\widetilde{f}$ par rapport à (t) au voisinage de 0.

Exercices supplémentaires

Exercice 13. Ecrire les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\exp x}{\sqrt{1+x}} \quad (n=4) \ , \quad g(x) = a^x \quad (a > 0, \ n \in \mathbb{N}) \ , \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad (n = 6) \ .$$

Exercice 14. A l'aide de DL, calculer les limites suivantes si elles existent :

$$\ell_1 = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)\arcsin x}{x - \tan^2 x} \ , \quad \ell_2 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \ ; \quad \ell_3 = \lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} \ .$$

Exercice 15. A l'aide de D.L., calculer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les limites suivantes si elles existent

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x - mx} \ ; \quad \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{m}{x-1} \right) \ .$$

Exercice 16. A l'aide de D.L., étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

Exercice 17. Trouver le $DL_n(0)$ des fonctions

$$f(x) = \tan x \quad (n=5) \ , \quad g(x) = \tan^2 x \quad (n=6) \ , \quad h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad (n=4) \ ,$$

$$j(x) = \frac{x}{\sin x} \quad (n=4) \ , \quad k(x) = e^{\cos x} \quad (n=6) \ , \quad \ell(x) = \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x} \quad (n=1) \ .$$