

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 3 :

Equations différentielles. Courbes paramétrées.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Exercice 1. Résoudre sur $]0, \infty[$ l'équation différentielle

$$(1+x)y' + y = (x^2 - 1)\ln(1+x). \quad (E)$$

(Rappeller le type de (E), la structure des solutions; résoudre l'équation homogène, chercher la solution particulière (variation de la c^{te}) et générale.)

Exercice 2. On considère, sur $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle

$$x^2 y' - \lambda y = f(x), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}).$$

- (a) Déterminer l'ensemble S de toutes les solutions à cette équation, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'une primitive faisant intervenir la fonction f .
- (b) Application : $\lambda = 2$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Trouver $y \in S$ vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 3. Résoudre, à l'aide du changement de variable indiqué, les équations

- (a) de Ricatti : $y' = (y-1)(xy - y - x)$ sur $\mathbb{R}$, en posant $y = 1 + 1/u$.
- (b) de Bernoulli : $y' \cos x + y \sin x + y^3 = 0$ sur $I =]-1, 1[$, $u = 1/y^2$.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 2nd ORDRE

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a) $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$
- (b) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$
- (c) $y'' - 2y' + y = x \operatorname{sh} x$
- (d) $y'' + 2y = x \sin(\sqrt{2}x)$
- (e) $y'' - 2y' + 3y = \sin 2x - 3 \cos x$

Exercice 5. On cherche une solution particulière à l'équation différentielle

$$y'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x}$$

sous la forme $y_p = Q(x)e^{\alpha x}$, lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$ est donné.

- (a) Etablir une relation entre Q et P , nécessaire pour que y_p soit solution.
- (b) On suppose que $y_h = (Ax + B)e^{\alpha x}$ est solution à $y'' + by' + cy = 0$, $\forall A, B \in \mathbb{R}$. Peut-on exprimer dans ce cas b et c en fonction de α ?

- (c) Si $b = -2\alpha$ et $c = \alpha^2$, simplifier la relation entre P et Q trouvée au (a). Que peut-on exiger de Q , dans ce cas, pour avoir une solution particulière la plus simple possible et déterminée de façon unique ?

COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 6. Etudier le point stationnaire de la courbe $\mathcal{C}$ du plan affine définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) &= t e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) &= (t-2) e^{-\frac{1}{t}} \end{cases}$$

Exercice 7. Etudier au voisinage du point $(x(0), y(0))$, la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + t^4 \\ y(t) &= 3t^2 + \frac{9}{2}t^3 + 2t^4 \end{cases}$$

Exercice 8. Même question pour la courbe définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{\sqrt{1+t^4}}{1+t} \\ y(t) &= \frac{t^3}{1+t} \end{cases}$$

Exercice 9. Faire une étude locale au voisinage du point stationnaire pour :

$$\begin{cases} x(t) &= \int_1^t \frac{u^2-1}{u^2+1} du \\ y(t) &= \int_1^t \frac{u^2-1}{u^3+1} du \end{cases}$$

Exercice 10. Soit la courbe $\mathcal{C}$ du plan affine $\mathcal{P}$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) &= 2t^3 - 3t^2 \\ y(t) &= 3t^4 - 4t^3 \end{cases}$$

- Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$?
- Rechercher les points stationnaires et les étudier.
- Etudier les arcs infinis.
- Rechercher les points multiples éventuels.
- Etablir le tableau de variation des applications coordonnées et tracer $\mathcal{C}$.