Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP 2
2^e semestre 2001–2002

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 3 :

Equations différentielles.

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1. On considère l'équation différentielle $x\,y' - y^2 = -1 - x - x^2$. (E)

(a) Résoudre l'équation (E) sans second membre (séparation des variables).

(b) Chercher une solution particulière à (E) sous forme polynômiale.

(c) Peut-on déduire de (a) et (b) l'ensemble de toutes les solutions de (E) ?

Exercice 2. Résoudre sur $]1, \infty[$ l'équation différentielle

$$(1-x)\,y' + y = (x-1)^2 \sin x \ .$$

Exercice 3. (a) Résoudre sur $I =]0, +\infty[$, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et de la fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, l'équation différentielle

$$xy' - \lambda y = f(x) \ .$$

(b) Application : $\lambda = 2,\ f = 3\ln x + 2$. — Quelle est la solution générale ? Quelle est la solution particulière $y = y_1$ vérifiant $y_1(1) = 1$?

(c) Entraînement : chercher la solution pour d'autres valeurs de λ, f, $y(x_0) = y_0$, et vérifier le résultat explicitement.

Équations différentielles linéaires du 2nd ordre

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' - y' - 6\,y = e^{-2x}$

(b) $y'' - 4\,y' + 5\,y = e^{2\,x} \cos x$

(c) $y'' - 2\,y' + y = 2\,x \operatorname{ch} x$

(d) $y'' + 4\,y = x \cos(2\,x)$

(e) $y'' - 2\,y' + 3\,y = 2 \sin x - \cos x$

Exercice 5. On cherche une solution particulière à l'équation différentielle

$$y'' + b\,y' + c\,y = P(x)\,e^{\alpha x}$$

sous la forme $y_p = Q(x)\,e^{\alpha x}$, lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$ est donné.

(a) Etablir une relation entre Q et P, nécessaire pour que y_p soit solution.

(b) On suppose que $y_h = (Ax + B)e^{\alpha x}$ est solution à $y'' + b\,y' + c\,y = 0$, $\forall A, B \in \mathbb{R}$. Peut-on exprimer dans ce cas b et c en fonction de α ?

(c) Si $b = -2\,\alpha$ et $c = \alpha^2$, simplifier la relation entre P et Q trouvée au (a). Que peut-on exiger de Q, dans ce cas, pour avoir une solution particulière la plus simple possible et déterminée de façon unique ?