Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 3 :
Intersection et somme de sous-espaces, supplémentaire.

Exercice 0. (a) Revoir *les définitions du cours* :

- **Somme de s.e.v. :** $F + G$; $\sum_{i \in I} F_i = \text{vect} \bigcup_{i \in I} F_i = \left[\bigcup_{i \in I} F_i \right]$.
- **Combinaisons linéaires (C.L.) :** $[v_1, \dots, v_n] = \mathbb{K} \cdot v_1 + \dots + \mathbb{K} \cdot v_n$,
 $[A] = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n ; n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^n, v \in A^n\}$; $[(v_i)_{i \in I}] = \text{im } \Psi_{(v_i)_{i \in I}}$.
- **S.e.v. engendré par une partie :** $\text{vect } A = \bigcap_{s.e.v. F \supset A} F$.
- **Somme directe de s.e.v. :** $F \oplus G = F + G$ avec $F \cap G = \{o\}$;
 alors F, G sont **s.e.v. supplémentaires** dans $F \oplus G$,
 et $p_F : x + y \mapsto x$ est le projecteur sur F (parallèlement à G).

(b) Revoir *les théorèmes importants du cours* :

- **Image directe et réciproque** par une application linéaire, **intersection et somme de s.e.v.** sont encore s.e.v.
- Le **s.e.v. engendré** par une partie est égal à l'ensemble des **combinaisons linéaires** de ses éléments : $\text{vect } A = [A]$, et aussi $\text{vect } (v_i)_{i \in I} = [(v_i)_{i \in I}]$.
- **Equivalence :** $E = F \oplus G \iff ((x, y) \mapsto x + y) \in \text{Iso}(F \times G, E)$
 $\iff$ unicité de la décomposition $z = x + y$, $\forall z \in E, (x, y) \in F \times G$.

SOUS-ESPACES DE $\mathbb{R}^3$ ET DE $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. (a) Exprimer $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_1 - x_2\}$ en utilisant le produit scalaire $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, avec $y \in \mathbb{R}$ bien choisi.

- * (b) Exprimer F comme noyau d'une application linéaire et en déduire que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Montrer que $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z \text{ et } y = 2x\}$ est un s.e.v., en l'exprimant comme intersection de deux s.e.v.
- (d) Donner un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $D = \mathbb{R} \cdot a$. (Utiliser le produit vectoriel $u \wedge v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$, $u, v \in \mathbb{R}^3$.)
- * (e) Exprimer D comme noyau d'une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (Généralisation de l'exo précédent à $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque), qui sera utile pour l'étude des systèmes linéaires et la méthode de Gauss.)

- * (a) Montrer que l'*hyperplan* orthogonal à $a \in \mathbb{R}^n$, défini par
 $H_a = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0\}$, est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
- (b) En comparant à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, définir l'angle entre deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ en termes du produit scalaire $x \cdot y$. (Utiliser arccos et $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.)

- (c) Écrire l'intersection $H(a_1, \dots, a_m)$ de plusieurs hyperplans $H_{a_1}, \dots, H_{a_m}$ comme noyau d'une application linéaire Ψ_v de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
- (d) Montrer que si $a = \lambda b + \mu c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}^n$), alors $H_b \cap H_c \subset H_a$.

En déduire que si un vecteur a_j de la famille $(a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$ est combinaison linéaire des autres vecteurs, alors $H(a_1, \dots, a_m) = H(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_m)$.

En déduire qu'il existe une partie $\{a'_1, \dots, a'_r\}$ de $\{a_1, \dots, a_m\}$ telle que $H(a'_1, \dots, a'_r) = H(a_1, \dots, a_m)$, aucun a'_i soit combinaison linéaire des autres, et que $\{a'_1, \dots, a'_r\}$ engendre le même espace que $\{a_1, \dots, a_m\}$.

* **Exercice 3.** (a) On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (2, 3, 4, 5), \quad v_3 = (4, 3, 2, 1), \quad v_4 = (3, 2, 3, 2).$$

Déterminer si les vecteurs suivants sont éléments de $F = [v_1, v_2, v_3, v_4]$,

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 1, 4), \quad u_3 = (9, 7, 5, 3), \quad u_4 = (1, 2, 4, 8)$$

en cherchant, à l'aide de la méthode de Gauss, une famille plus simple qui engendre le même espace que (v_1, v_2, v_3, v_4) .

- (b) Même exercice avec deux familles de 5 vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^5$.

SUPPLÉMENTAIRE ET PROJECTEURS

Exercice 4. Montrer que $E = F \oplus G$ et donner les projecteurs p_F et p_G pour

- (a) $E = \mathbb{R}^n$, $F = [a]$, $G = H_a$ (cf. exo 2a) [résoudre $a \cdot (v - \lambda a) = 0$],
- * (b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F =$ fonctions paires, $G =$ fonctions impaires (série 2, ex. 2f)
- (c) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid f = c^{ste}\}$, $G = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$,
- (d) $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \{P \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} : P = a_0 + a_2X^2 + \dots + a_{2k}X^{2k}\}$,
 $G = \{P \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} : P = a_1X + a_3X^3 + \dots + a_{2k+1}X^{2k+1}\}$.

Exercice 5. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E . Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

- (a) Montrer que l'application $s_F : x \mapsto y - z$ est un endomorphisme de E , appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G .
- (b) Montrer que $s_F = \text{id}_E - 2p_G = 2p_F - \text{id}_E = p_F - p_G$, ou p_X est le projecteur sur X .

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $u \in L(E)$ tel que $\text{im } u = [v]$ pour un $v \in E$.

- (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in L(E, \mathbb{K})$ tel que $\forall x \in E : u(x) = \alpha(x) \cdot v$.
- (b) Si $v \neq o$, montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u \circ u = \lambda u$.
- (c) En déduire un projecteur p sur $\text{im } u$, et montrer que $\ker u$ est un supplémentaire de $\text{im } u$ dans E .

Exercice 7. Soit F un s.e.v. d'un e.v. E , et F_1, F_2 deux supplémentaires de F dans E . Montrer que la restriction à F_2 du projecteur sur F_1 parallèlement à F , $u = p_{F_1}|_{F_2}$, est un isomorphisme de F_2 sur F_1 .