Université Antilles–Guyane — DEUG MIAS 1^e année
UFR Sciences Exactes et Naturelles — Module MIP2
Dépt Scientifique Interfacultaire — 2^e semestre 2002-2003

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés$^{(*)}$, série 3 :
Intersection et somme de sous-espaces, supplémentaire.

(RP) **Exercice 22.** Revoir ***les théorèmes importants du cours :***

- **Image directe et réciproque de s.e.v.** sont encore s.e.v.
- **Intersection et somme de s.e.v.** sont encore s.e.v.
- Le **s.e.v. engendré** par une partie est égal à l'ensemble des **combinaisons linéaires** de ses éléments.
- Equivalence : $E = F \oplus G \iff ((x,y) \mapsto x+y) \in \mathrm{Iso}(F \times G, E)$
$\iff$ unicité de la décomposition $z = x + y$, $\forall z \in E,\ (x,y) \in F \times G$.

(RP) **Exercice 23.** Revoir ***les définitions du cours :***

- **Somme de s.e.v. :** $F + G$; $\sum_{i\in I} F_i = \mathrm{vect} \bigcup_{i\in I} F_i$.
- **Combinaisons linéaires (C.L.) :** $[v_1, ..., v_n] = \mathbb{K} \cdot v_1 + \cdots + \mathbb{K} \cdot v_n$
$[v] = \mathrm{im}\, \Psi_v\ (v \in E^I)$; $[A] = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\ ;\ n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^n, v \in A^n\}$.
- **S.e.v. engendré par une partie :** $\mathrm{vect}\, A = \bigcap_{s.e.v.\ F \supset A} F$.
- **Somme directe de s.e.v.** : $F \oplus G = F + G$ avec $F \cap G = \{o\}$; F, G sont **s.e.v. supplémentaires** dans $F \oplus G$; $p_F : x + y \mapsto x$ le projecteur sur F.

(RP) **Exercice 24.** Comme exercice 3, série 1. (Relisez-le !) Développer ce qui n'est pas clair ci-dessus ; poser des questions. Méditer sur l'équation $[A] = [\mathrm{id}_E|_A]$.

(Indication : l'injection canonique $i_{A\to E} = \mathrm{id}_E|_A$ d'une partie $A \subset E$ dans E est une application donc une famille v (exo 2(c), série 1) ; quel est l'ensemble des indices I, que vaut v_i, détailler la définition de l'application linéaire Ψ_v attachée à v (exo 16(c), série 2).) Posez des questions, dans l'ordre : à vous même, à vos camarades, aux tuteurs, aux chargés de TD, au prof. du cours !

Sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$

(AD) **Exercice 25.**

(a) Exprimer $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 + x_3\}$ en utilisant le produit scalaire $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. — Interprétation géométrique ?

(b) Exprimer F comme noyau d'une application linéaire et en déduire que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. (On peut utiliser l'exo 16(b) avec un $v \in \mathbb{R}^3$.)

(c) Montrer que $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \text{ et } y = 2z\}$ est un s.e.v., en l'exprimant comme intersection de deux s.e.v.

(d) Donner $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $D = \mathbb{R}\cdot a$. (Utiliser le produit vectoriel $u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$, orthogonal aux vecteurs u, v.)

(e) Ecrire la définition de D en termes d'une seule équation vectorielle dans $\mathbb{R}^2$, pour l'exprimer ensuite comme noyau d'une application linéaire.

$^{(*)}$ RP = **révision** du cours / **préparation** du T.D. (obligatoire; revu en T.D. seulement sur demande !) ; AD = **application directe** du cours ; EX = **exercice** ; PB = **problème**.

(EX) **Exercice 26.** On généralise l'exercice précédent à $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

(a) Montrer que l'*hyperplan* orthogonal à $a \in \mathbb{R}^n$, défini par $H_a = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 a_1 + ... + x_n a_n = 0\}$, est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

(b) En comparant à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, définir l'angle entre deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ en termes du produit scalaire $x \cdot y$. (On utilisera arccos et $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.)

(c) Ecrire l'intersection $H(a_1, ..., a_m)$ de plusieurs hyperplans $H_{a_1}, ..., H_{a_m}$ comme noyau d'une application linéaire Ψ_v de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

(d) Montrer que si $a = \lambda b + \mu c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}^n)$, alors $H_b \cap H_c \subset H_a$.
En déduire que si un vecteur a_j de la famille $a = (a_1, ..., a_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$ est combinaison linéaire d'autres vecteurs de a, alors $H(a_1, ..., a_m) = H(a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_m)$.
En déduire qu'il existe une partie $\{a'_1, ..., a'_r\}$ de $\{a_1, ..., a_m\}$ telle que $H(a'_1, ..., a'_r) = H(a_1, ..., a_m)$, aucun a'_i soit combinaison linéaire des autres, et que $\{a'_1, ..., a'_r\}$ engendre le même espace que $\{a_1, ..., a_m\}$.

(e) (À titre indicatif : généralisation du produit vectoriel.)
Pour toute famille $(a_2, ..., a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, le vecteur $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ donné par $v_i = \sum_{i_2, ..., i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i, i_2, ..., i_n} \prod_{j=2}^{n} (a_j)_{i_j}$ est tel que $H(a_2, ..., a_n) = \mathbb{R} \cdot v$, sauf si un a_j est combinaison linéaire des autres, auquel cas $v = o$.
(Ici, ε est défini par $\varepsilon_{1,...,n} = 1$ et l'antisymétrie $\varepsilon_{...i...j...} = -\varepsilon_{...j...i...}$).

Supplémentaire et projecteurs

(EX) **Exercice 27.** Montrer que $E = F \oplus G$ et donner les projecteurs p_F et p_G pour

(a) $E = \mathbb{R}^n$, $F = [a]$, $G = H_a$ (cf. exo 26a) [résoudre $\Psi_a(v - \lambda a) = 0$],

(b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F =$ fonctions paires, $G =$ fonctions impaires (cf. exo 10f),

(c) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid f = c^{ste}\}$, $G = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$,

(d) $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \{P \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} : P = a_0 + a_2 X^2 + ... + a_{2k} X^{2k}\}$,
$G = \{P \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} : P = a_1 X + a_3 X^3 + ... + a_{2k+1} X^{2k+1}\}$.

(AD) **Exercice 28.** Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

(a) Montrer que l'application $s_F : x \mapsto y - z$ est un endomorphisme de E, appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(b) Montrer que $s_F = \mathrm{id}_E - 2\, p_G = 2\, p_F - \mathrm{id}_E = p_F - p_G$, ou p_X est le projecteur sur X.

(EX) **Exercice 29.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E)$ tel que $\operatorname{im} u = [v]$ pour un $v \in E$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha \in L(E, \mathbb{K})$ tel que $\forall x \in E : u(x) = \alpha(x) \cdot v$.

(b) Si $v \neq o$, montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u \circ u = \lambda\, u$.

(c) En déduire un projecteur p sur $\operatorname{im} u$, et montrer que $\ker u$ est un supplémentaire de $\operatorname{im} u$ dans E.

(PB) **Exercice 30.** Soit F un s.e.v. d'un e.v. E, et F_1, F_2 deux supplémentaires de F dans E. Montrer que la restriction à F_2 du projecteur sur F_1 parallèlement à F, $u = p_{F_1}|_{F_2}$, est un isomorphisme de F_2 sur F_1.