

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 2 :

Développements limités.

GÉNÉRALITÉS ; D.L. DE FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

Exercice 1. Montrer que $f \underset{(a)}{=} o(f) \implies f = o$ sur un voisinage de a .

Exercice 2. Montrer qu'une fonction polynômiale f de degré d admet un $DL_n(0)$ (développement limité d'ordre n au voisinage de 0), pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un $DL_n(0)$, alors ce D.L. est unique.

Exercice 4. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} : |e^x - x - 1| \leq \frac{1}{2} x^2 e^{|x|}, \quad (b) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ : x - \frac{1}{2} x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 5. Déterminer le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

- (a) $x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (n = 2p + 1 \text{ avec } p \in \mathbb{N})$
- (b) $x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (n = 2p + 2 \text{ avec } p \in \mathbb{N})$
- (c) $x \mapsto e^x \sin x \quad (n = 5)$
- (d) $x \mapsto \arctan x \quad (n = 2p + 2 \text{ avec } p \in \mathbb{N})$

Exercice 6. Déterminer les D.L. suivants :

- (a) $DL_4(1)$ de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$,
- (b) $DL_2(\infty)$ de $x \mapsto x - \sqrt[4]{x^4 - x^3}$,
- (c) $DL_4(\frac{\pi}{6})$ de $x \mapsto (\sin 2x)^2$.

Exercice 7. On rappelle que $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \arcsin(\sin x) = x$,

$$\forall x \in [-1, 1] : \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

- (a) Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \arcsin x$ à l'aide du D.L. de $x \mapsto \sin x$.
- (b) En déduire le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \arccos x$.

RECHERCHE DE FONCTIONS ÉQUIVALENTES ET LIMITES

Exercice 8. Déterminer un équivalent, au voisinage de x_0 , des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \quad (x_0 = 0), \quad g(x) = 2^x - x^2 \quad (x_0 = 2).$$

Exercice 9. A l'aide de D.L., calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1) \ln x}, \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}.$$

Exercice 10. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer à l'aide d'un D.L. la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$.

BRANCHES INFINIES ET ÉTUDE LOCALE DE FONCTIONS

Exercice 11. Donner, à l'aide de D.L., au voisinage de ∞ et $-\infty$, l'asymptote et la position par rapport à l'asymptote, de la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{1+x}e^{1/x}$.

Exercice 12. Démontrer que la fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème des accroissements finis, sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, à la fonction f_λ définie par

$$f_\lambda(x) = e^{a+\lambda(x-a)} - (1-\lambda)e^a - \lambda e^x .$$

Exercice 13. A l'aide d'un D.L. étudier la convexité et la concavité locale au voisinage de x_0 ainsi que la nature (extréma, point d'inflexion) du point $(x_0, f(x_0))$, et donner l'équation de la tangente en ce point, pour

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 \quad \text{et} \quad x_0 \in \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2 \right\} .$$

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{4}, 0[\cup] 0, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \frac{g(x)}{\tan x} \quad \text{avec} \quad g(x) = e^{\sqrt{1+\sin x}} - e .$$

- (a) Calculer le $DL_3(0)$ de g .
- (b) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
- (c) Notons $\tilde{f}$ ce prolongement de f . Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0.
- (d) Donner l'équation de la tangente (t) au graphe de $\tilde{f}$ au point $(0, \tilde{f}(0))$.
- (e) Préciser la position du graphe de $\tilde{f}$ par rapport à (t) au voisinage de 0.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 15. Ecrire les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\exp x}{\sqrt{1+x}} \quad (n=4) , \quad g(x) = a^x \quad (a > 0, n \in \mathbb{N}) , \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \quad (n=6) .$$

Exercice 16. A l'aide de DL, calculer les limites suivantes si elles existent :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arcsin x}{x - \tan^2 x} , \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} ; \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} .$$

Exercice 17. A l'aide de D.L., calculer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les limites suivantes si elles existent

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - mx} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{m}{x-1} \right) .$$

Exercice 18. A l'aide de D.L., étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$.