

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 2 : *Intégration*.

(Les exercices marqués d'une (*) seront corrigés en T.D.)

Exercice 1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}f(x)$.

- (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et calculer $F''(x)$, ($x \in \mathbb{R}$).
- (b) En appliquant à F la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x t(x-t)f''(t) dt .$$

Exercice 2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists M > 0, \quad \forall t \in I : |f^{(3)}(t)| \leq M .$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall a, x \in I : \left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \right| \leq \frac{M}{6} |x-a|^3 .$$

Exercice 3. On pose $f(x) = \ln(1+x^2)$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0, 1]$, à un ordre convenable, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2} .$$

Exercice 4. (*) Montrer que pour $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, si $g > 0$ sur $]a, b[$, alors

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

(théorème de la moyenne généralisé). [Indication : étudier $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ pour justifier le changement de variable $u(x) = a + G(x) \cdot (b-a)/G(b)$.]

Exercice 5. (*) Calculer les primitives suivantes (intégration à vue) :

$$I_1 = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx, \quad I_2 = \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad I_3 = \int \frac{1}{x \ln x} dx,$$

$$I_4 = \int \frac{2x - \sin x}{\sqrt{x^2 + \cos x}} dx, \quad I_5 = \int \frac{\cos x}{(\sin x)^n} dx \quad (n > 1).$$

Exercice 6. Calculer, à l'aide d'intégration par parties, les primitives

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \int \ln x \, dx, \quad \text{(b)} \int \arctan x \, dx, \quad \text{(c)} \int e^x \sin x \, dx, \\ & (*) \text{(d)} \int \frac{x e^x}{(1 + e^x)^3} \, dx, \quad \text{(e)} \int x e^{2x+1} \, dx, \quad \text{(f)} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \, dx. \end{aligned}$$

(Indication pour (f) : intégrer par parties $\int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$.)

Exercice 7. On pose $I_n(x) = \int (\ln x)^n \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etablir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$, $I_{n-1}(x)$. Calculer $I_3(x)$.

Exercice 8. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les primitives :

$$\begin{aligned} (*) \quad A &= \int (\sin x \cos x - 2 \sin^3 x \cos^2 x) \, dx, \quad B = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}, \\ (*) \quad D &= \int \frac{e^x \, dx}{(1 + e^x)\sqrt{e^x - 1}}, \quad E = \int \frac{2x \, dx}{\sqrt{2x + 1}}, \quad F = \int \frac{dx}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4}. \end{aligned}$$

Exercice 9. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles

$$\begin{aligned} (*) \quad f(x) &= \frac{x + 3}{x^2 - 4}, \quad g(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 5)}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x + 1)^2}, \\ (*) \quad v(x) &= \frac{6x^2 + 12x + 4}{x(x + 2)^2}, \quad w(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^3}. \end{aligned}$$

Exercice 10. Calculer les primitives :

$$\begin{aligned} (*) \quad A &= \int \frac{x + 2}{x^2 + x - 6} \, dx, \quad (*) \quad B = \int \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} \, dx, \\ C &= \int \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1} \, dx, \quad D = \int \frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^2} \, dx, \quad E = \int \frac{2}{x^2(x^2 + 1)^2} \, dx. \end{aligned}$$

Exercice 11. (a) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^5 + x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^5 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$

(b) Calculer $\int f(x) \, dx$ et $\int g(x) \, dx$.

Exercice 12. Calculer les primitives

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^2} \, dx, \quad B = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx, \\ D &= \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^3} \, dx, \quad (*) \quad E = \int \frac{dx}{\sin x}, \quad F = \int \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} \, dx. \end{aligned}$$