Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2003-2004

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 2 :
Sous-espaces vectoriels, Appplications linéaires

Exercice 0. (Révision du cours — à faire **avant** le T.D. !)

(a) Revoir ***les définitions du deuxième cours :***

- **Sous-espace vectoriel (s.e.v.)**
- Notations ensemblistes : $A + B$; $\mathbb{K}\, x$ ...
- **Applications** ($\mathbb{K}$–) **linéaires** d'un $\mathbb{K}$–e.v. E vers un $\mathbb{K}$–e.v. F : $\mathcal{L}(E, F)$; **endo-**, **iso-**, **auto**morphisme ; **forme linéaire**.
- **Noyau et image** de $f \in \mathcal{L}(E, F)$

(b) Bien connaître ***les caractérisations pratiques :***

- Une partie F d'un $\mathbb{K}$–e.v. E est s.e.v. de $E \iff$
  F non-vide, stable par $+$ et par multiplication scalaire $\iff$
  $o_E \in F,\ F + F \subset F,\ \mathbb{K} \cdot F \subset F \iff o_E \in F,\ F + \mathbb{K} \cdot F \subset F.$
  (Developper ceci : $\mathbb{K} \cdot F \subset F \iff \forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F : \lambda \cdot x \in F$, ...)
- $f : E \to F$ est $\mathbb{K}$–linéaire si et seulement si :
  E, F sont $\mathbb{K}$–e.v., et $\forall\lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E : f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est **injective** ssi $\ker f = \{o_E\}$ (et surjective ssi $\operatorname{im} f = F$).

Sous espaces vectoriels

Exercice 1. (a) Pour $E = \mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $F_a := \{(x, y, a); x, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_a est sous-espace vectoriel de E si et seulement si $a = 0$.

(b) Soit $E = \mathbb{R}^I$ le $\mathbb{R}$–e.v. des applications numériques définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On fixe $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $F_a = \{f \in E \mid f(x_0) = a\}$ est s.e.v. de E si et seulement si $a = 0$. Comparer avec le (a).

Exercice 2. Lesquels des ensembles suivants sont s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

(a) $A_0 = \{f \in E \mid f(0)^2 + f(1)^2 = 0\}$, $A_1 = \{f \in E \mid (f(0) + f(1))^2 = 0\}$

(b) les fcts à support borné, $B = \{f \in E \mid \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow f(x) = 0\}$

(c) fonctions croissantes, $C = \{f \in E \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)\}$

(d) $D = C - C = \{f \in E \mid \exists g, h \in C : f = g - h\}$

(e) les fonctions bornées ; n fois dérivables ; polynômiales ; $\sim$ de degré n.

(f) $F_\alpha = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}_+ : f(-x) = \alpha f(x)\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. ($F_0, F_{\pm 1} = ?$)

(g) $G = \{x \mapsto a \sin x + b \cos x\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

(h) Donner un autre exemple intéressant de sev de E, et un contre-exemple.

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, les suites nulles sauf un nombre fini de termes, est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Identifier $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ avec les polynômes $\mathbb{R}[X]$. (Isomorphisme ?)

Exercice 4. Soit F un s.e.v. d'un e.v. E. Montrer que $H = (E \setminus F) \cup \{0\}$ est un s.e.v. si et seulement si $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Applications linéaires

Exercice 5. (a) Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x+y+z \end{array}, \quad g : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (2\,y, x-y, x) \end{array}, \quad h : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array},$$

$$j : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (a,b) \mapsto a \cdot \sin + b \cdot \cos \end{array}, \quad k : \begin{array}{c} (\mathbb{R},+,\cdot) \to (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \star) \\ x \mapsto e^x \end{array} \quad \text{(cf. exo 4)}$$

(b) Parmi f, g, h, k, lesquelles sont injectives, surjectives ?

Exercice 6. Montrer que pour des applications linéaires $f, g \in \mathcal{L}(E,E)$, les applications $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{K}$) et $g \circ f$ sont encore linéaires.
(Pour lequel de ces résultats faut-il utiliser la commutativité de $\mathbb{K}$?)

Exercice 7. Définir l'application « dérivée » d'un polynôme, et montrer que c'est une application linéaire. Quel est le noyau de la « n^e dérivée » ?

Exercice 8. (a) Soit $v = (v_1, v_2)$ la famille des deux vecteurs $v_1 = (0,1,1)$ et $v_2 = (2,-1,0)$. Montrer que l'application $\Psi_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ est linéaire et injective. Comparer avec g de l'exercice 5.

(b) Généraliser Ψ_v à une famille $v = (v_1, ..., v_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$–ev E.

(c) Généraliser à des familles $(v_i)_{i\in I}$ quelconques d'élements d'un $\mathbb{K}$–ev E. (Utiliser $\mathbb{K}^{(I)} = \big\{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \mid \operatorname{card}\{i \mid \lambda_i \neq 0\} < \infty\big\}$.) Comparer Ψ_v pour la famille $v = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ à l'isomorphisme de l'exo 3.

Exercice 9. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective sur F, et g une application de F dans G. Montrer que si $g \circ f$ est linéaire, alors g est linéare.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Montrer que l'application φ de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ dans E définie par $\varphi(f) = f(1)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Exercice 11. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que

$$u^* : \begin{array}{c} \mathcal{L}(F,G) \to \mathcal{L}(E,G) \\ w \mapsto w \circ u \end{array} \quad \text{et} \quad v_* : \begin{array}{c} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,G) \\ w \mapsto v \circ w \end{array} \quad \text{sont linéaires.}$$

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $E_n = \{P \in E; \deg P \leq n\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(P) = XP' + P$, où P' désigne la dérivée de P.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E et que la restriction φ_n de φ à E_n est un endomorphisme de E_n.

(b) Montrer que φ_n est surjective.

(c) Déterminer les polynômes $P \in E_n$ et les scalaires λ tels que $\varphi(P) = \lambda P$. En déduire que φ est un automorphisme de E.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, on pose $P(u) = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + ... + a_n u^n$, avec $u^k := u \circ u \circ \cdots \circ u$ (k fois).

(a) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

(b) Si u n'est pas injectif, montrer que : $\ker u \subset \ker P(u) \iff P(0) = 0$.

(c) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors $\ker P(u) \subset \operatorname{im} u$.