Université Antilles–Guyane — DEUG MIAS 1^e année
UFR Sciences Exactes et Naturelles — Module MIP2
Dépt Scientifique Interfacultaire — 2^e semestre 2002-2003

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés$^{(*)}$, série 2 :
Sous-espaces vectoriels, Appplications linéaires

(RP) **Exercice 6.** Revoir ***les définitions du deuxième cours :***

- **Sous-espace vectoriel (s.e.v.) :** partie qui est e.v. pour les lois induits
- Notations ensemblistes : $A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\}$; $\mathbb{K}x = \mathbb{K} \cdot \{x\}$...
- **Application ($\mathbb{K}$–)linéaire** du $\mathbb{K}$–e.v. E sur le $\mathbb{K}$–e.v. F : $f \in \mathcal{L}(E, F) \iff f : E \to F$ t.q. $\forall x, y \in E, \forall\lambda \in \mathbb{K} : f(x + y) = f(x) + f(y),\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
  Endo- $(F = E)$, **iso-** (bijective), **auto**morphisme, **forme linéaire** $(F = \mathbb{K})$.
- **Noyau, image** de $f \in \mathcal{L}(E, F)$: $\ker f = f^{-1}(\{o_F\})$; $\operatorname{im} f = f(E)$.

(RP) **Exercice 7.** Bien connaître ***les caractérisations pratiques :***

- Une partie F d'un $\mathbb{K}$–e.v. E est s.e.v. de $E \iff o_E \in F,\ F + \mathbb{K} \cdot F \subset F$
  $\iff o_E \in F,\ \mathbb{K} \cdot F + \mathbb{K} \cdot F \subset F \iff F \neq \emptyset,\ F + F \subset F,\ \mathbb{K} \cdot F \subset F$
  $\iff F$ non-vide, stable par + et par multiplication scalaire.
  (<u>Expliciter ces formules</u>, p.ex. : $\mathbb{K} \cdot F \subset F \iff \forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F : \lambda \cdot x \in F$.)
- $f : E \to F$ est $\mathbb{K}$–linéaire ssi E, F sont $\mathbb{K}$–e.v. et $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E$:
  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ (ou simplement : $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$).
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est **injective** ssi $\ker f = \{o_E\}$ (et surjective ssi $\operatorname{im} f = F$).

(RP) **Exercice 8.** Comme exercice 3.

Sous espaces vectoriels

(AD) **Exercice 9.** (a) Pour $E = \mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $F_a := \{(x, y, a); x, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_a est sous-espace vectoriel de E si et seulement si $a = 0$.

(b) Soit $E = \mathbb{R}^I$ le $\mathbb{R}$–e.v. des applications numériques définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On fixe $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $F_a = \{f \in E \mid f(x_0) = a\}$ est s.e.v. de E si et seulement si $a = 0$. Comparer avec le (a).

Exercice 10. Lesquels des ensembles suivants sont s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

(AD) (a) $A_0 = \{f \in E \mid f(0)^2 + f(1)^2 = 0\}$, $A_1 = \{f \in E \mid (f(0) + f(1))^2 = 0\}$

(AD) (b) les fcts à support borné, $B = \{f \in E \mid \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow f(x) = 0\}$

(AD) (c) fonctions croissantes, $C = \{f \in E \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\}$

(EX) (d) $D = C - C = \{f \in E \mid \exists g, h \in C : f = g - h\}$

(AD) (e) les fonctions bornées ; n fois dérivables ; polynômiales ; $\sim$ de degré n.

(AD) (f) $F_\alpha = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}_+ : f(-x) = \alpha f(x)\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. $(F_0, F_{\pm 1} = ?)$

(AD) (g) $G = \{x \mapsto a \sin x + b \cos x\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

(EX) (h) Donner un autre exemple intéressant de sev de E, et un contre-exemple.

(*) RP = **révision** du cours / **préparation** du T.D. (obligatoire; revu en T.D. seulement sur demande !) ; AD = **application directe** du cours ; EX = **exercice** ; PB = **problème**.

(EX) **Exercice 11.** Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, les suites nulles sauf un nombre fini de termes, est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Identifier $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ avec les polynômes $\mathbb{R}[X]$. (Isomorphisme ?)

(PB) **Exercice 12.** Soit F un s.e.v. d'un e.v. E. Montrer que $H = (E \setminus F) \cup \{0\}$ est un s.e.v. si et seulement si $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Applications linéaires

(AD) **Exercice 13.** (a) Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto x+y+z \end{array}, \quad g : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (2y, x-y, x) \end{array}, \quad h : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto xy \end{array},$$

$$j : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (a,b) & \mapsto a \cdot \sin + b \cdot \cos \end{array}, \quad k : \begin{array}{rl} (\mathbb{R},+,\cdot) & \to (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \star) \\ x & \mapsto e^x \end{array} \quad \text{(cf. exo 5)}$$

(b) Parmi f, g, h, k, lesquelles sont injectives, surjectives ?

(EX) **Exercice 14.** Montrer que pour des applications linéaires $f, g \in \mathcal{L}(E,E)$, les applications $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{K}$) et $g \circ f$ sont encore linéaires. (Pour lequel de ces résultats faut-il utiliser la commutativité de $\mathbb{K}$?)

(EX) **Exercice 15.** Définir l'application « dérivée » d'un polynôme, et montrer que c'est une application linéaire. Quel est le noyau de la « n^e dérivée » ?

(AD) **Exercice 16.** (a) Soit $v = (v_1, v_2)$ la famille des deux vecteurs $v_1 = (0,1,1)$ et $v_2 = (2,-1,0)$. Montrer que l'application $\Psi_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ est linéaire et injective. Comparer avec g de l'exercice 13.

(EX) (b) Généraliser Ψ_v à une famille $v = (v_1, ..., v_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$–ev E.

(PB) (c) Généraliser à des familles $(v_i)_{i \in I}$ quelconques d'élements d'un $\mathbb{K}$–ev E. (Utiliser $\mathbb{K}^{(I)} = \left\{ (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \mid \operatorname{card} \{ i \mid \lambda_i \neq 0 \} < \infty \right\}$.) Comparer Ψ_v pour la famille $v = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ à l'isomorphisme de l'exo 11.

(PB) **Exercice 17.** Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective sur F, et g une application de F dans G. Montrer que si $g \circ f$ est linéaire, alors g est linéare.

(EX) **Exercice 18.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Montrer que l'application φ de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ dans E définie par $\varphi(f) = f(1)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

(EX) **Exercice 19.** Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que

$$u^* : \begin{array}{rl} \mathcal{L}(F,G) & \to \mathcal{L}(E,G) \\ w & \mapsto w \circ u \end{array} \quad \text{et} \quad v_* : \begin{array}{rl} \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{L}(E,G) \\ w & \mapsto v \circ w \end{array} \quad \text{sont linéaires.}$$

Exercice 20. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $E_n = \{ P \in E ; \deg P \leq n \}$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(P) = XP' + P$, où P' désigne la dérivée de P.

(AD) (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E et que la restriction φ_n de φ à E_n est un endomorphisme de E_n.

(PB) (b) Montrer que φ_n est surjective.

(PB) (c) Déterminer les polynômes $P \in E_n$ et les scalaires λ tels que $\varphi(P) = \lambda P$. En déduire que φ est un automorphisme de E.

(PB) **Exercice 21.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, on pose $P(u) = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + ... + a_n u^n$, avec $u^k := u \circ u \circ \cdots \circ u$ (k fois).

(a) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

(b) Si u n'est pas injectif, montrer que : $\ker u \subset \ker P(u) \iff P(0) = 0$.

(c) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors $\ker P(u) \subset \operatorname{im} u$.