Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1e année
Module MIP 2
2e semestre 2003–2004

Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 1 : *Intégration.*

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes : (utiliser $f(u(x))' = f'(u(x))\cdot u'(x)$)

$$I_1 = \int \Big(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^2 \mathrm{d}x\ ,\quad I_2 = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\ ,\quad I_3 = \int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$I_4 = \int \frac{\sin x - 3\,x^2}{\sqrt{\cos x + x^3}}\,\mathrm{d}x\ ,\quad I_5 = \int \frac{\cos x}{(\sin x)^n}\,\mathrm{d}x\quad (n > 1)\ .$$

Exercice 2. Calculer, à l'aide d'intégration par parties, les primitives

(a) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x\,e^x}{(1+e^x)^3}\,\mathrm{d}x$, (e) $\displaystyle\int x\,e^{2\,x+1}\,\mathrm{d}x$, (f) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

(Indication pour (f) : intégrer par parties $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.)

Exercice 3. On pose $I_n(x) = \displaystyle\int (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etablir une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$). Calculer $I_3(x)$.

Exercice 4. Démontrer la **formule de Taylor avec reste intégral** : Pour tout $a, x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x])$ ($n+1$ fois continûment dérivable), on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t\ .$$

(Indication : utiliser une récurrence sur n, et une intégration par parties.)

Exercice 5. On pose $f(x) = \ln(1+x^2)$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,1]$, à un ordre convenable, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{(1+t)\,(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\ .$$

Exercice 6. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists M > 0\ ,\quad \forall t \in I\ :\quad |f^{(3)}(t)| \le M\ .$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral (ex. 4), montrer

$$\forall a, x \in I :\ \left| f(x) - f(a) - f'(a)\,(x-a) - \frac{1}{2}\,f''(a)\,(x-a)^2 \right| \le \frac{M}{6}\,|x-a|^3\ .$$

Exercice 7. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0)=0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2} f(x)$.

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et calculer $F''(x)$, $(x \in \mathbb{R})$.

(b) En appliquant à F la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x t\,(x-t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Exercice 8. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les primitives :

$$A = \int (\cos^3 x \sin^2 x - 3\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x\ ,\quad B = \int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln(\ln x)}\ ,$$

$$D = \int \frac{e^x\ \mathrm{d}x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}\ ,\quad E = \int \frac{2\,x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1}}\ ,\quad F = \int \frac{\mathrm{d}x}{3\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 2}\ .$$

Exercice 9. Montrer que pour $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, si $g > 0$ sur $]a,b[$, alors

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(théorème de la moyenne généralisé). [Indication : étudier $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour justifier le changement de variable $u(x) = a + G(x)\cdot(b-a)/G(b)$.]

Exercice 10. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}\ ,\quad g(x) = \frac{2x^2+3x-1}{(x-2)(x^2+2x+5)}\ ,\quad h(x) = \frac{x^2-2x+2}{(x+1)^2}\ ,$$

$$v(x) = \frac{6x^2+12x+4}{x(x+2)^2}\ ,\quad w(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)^3}\ .$$

Exercice 11. Calculer les intégrales :

$$A = \int_3^8 \frac{x+2}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x\ ,\quad B = \int_2^3 \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$C = \int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\ ,\quad D = \int_2^4 \frac{x^3+1}{x\,(x-1)^2}\,\mathrm{d}x\ ,\quad E = \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2\,(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 12. Décomposer en éléments simples et calculer la primitive de

$$f(x) = \frac{x^2-x+2}{x^5+x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^5-x^3+3x^2+5x+2}{(x-1)^2\,(x^2+2x+2)}\ .$$

Exercice 13. Calculer les primitives

$$A = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x\ ,\quad B = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$D = \int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x\ ,\quad E = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\ ,\quad F = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x\ .$$