Mathématiques 2 / Analyse — T.D. série n° 1 :

Développements limités.

GÉNÉRALITÉS ; D.L. DE FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

Exercice 1. Montrer qu'une fonction polynômiale f de degré d admet un $DL_n(0)$ (développement limité d'ordre n au voisinage de 0), pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un $DL_n(0)$, alors ce D.L. est unique.

Exercice 3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} : |e^x - x - 1| \leq \frac{1}{2}x^2 e^{|x|}, \quad (b) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ : x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x .$$

Exercice 4. Déterminer le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$(a) \quad x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (n = 2p + 1 \text{ avec } p \in \mathbb{N})$$

$$(b) \quad x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (n = 2p + 2 \text{ avec } p \in \mathbb{N})$$

$$(c) \quad x \mapsto e^x \sin x \quad (n = 5)$$

$$(d) \quad x \mapsto \arctan x \quad (n = 2p + 2 \text{ avec } p \in \mathbb{N})$$

Exercice 5. Déterminer les D.L. suivants :

$$(a) \quad DL_4(1) \text{ de } x \mapsto \frac{\ln x}{x^2},$$

$$(b) \quad DL_2(\infty) \text{ de } x \mapsto x - \sqrt[4]{x^4 - x^3}.$$

Exercice 6. On rappelle que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin x) = x$,

$$\forall x \in [-1, 1] : \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x .$$

(a) Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \arcsin x$ à l'aide du D.L. de la fonction $x \mapsto \sin x$.

(b) En déduire le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \arccos x$.

RECHERCHE DE FONCTIONS ÉQUIVALENTES ET LIMITES

Exercice 7. Déterminer un équivalent, au voisinage de x_0 , des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \quad (x_0 = 0), \quad g(x) = 2^x - x^2 \quad (x_0 = 2) .$$

Exercice 8. A l'aide de D.L., calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1) \ln x}, \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} .$$

Exercice 9. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer à l'aide d'un D.L. la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$.

BRANCHES INFINIES ET ÉTUDE LOCALE DE FONCTIONS

Exercice 10. Donner, à l'aide de D.L., au voisinage de ∞ et $-\infty$, l'asymptote et la position par rapport à l'asymptote, de la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{1+x}e^{1/x}$.

Exercice 11. Démontrer que la fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème des accroissements finis, sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, à la fonction f_λ définie par

$$f_\lambda(x) = e^{a+\lambda(x-a)} - (1-\lambda)e^a - \lambda e^x .$$

Exercice 12. A l'aide d'un D.L. étudier la convexité et la concavité locale au voisinage de x_0 ainsi que la nature (extréma, point d'inflexion) du point $(x_0, f(x_0))$, et donner l'équation de la tangente en ce point, pour

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 \quad \text{et} \quad x_0 \in \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2 \right\} .$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \frac{g(x)}{\tan x} \quad \text{avec} \quad g(x) = e^{\sqrt{1+\sin x}} - e .$$

- Calculer le $DL_3(0)$ de g .
- Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
- Notons $\tilde{f}$ ce prolongement de f . Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0.
- Donner l'équation de la tangente (t) au graphe de $\tilde{f}$ au point $(0, \tilde{f}(0))$.
- Préciser la position du graphe de $\tilde{f}$ par rapport à (t) au voisinage de 0.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 14. Ecrire les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\exp x}{\sqrt{1+x}} \quad (n = 4) , \quad g(x) = a^x \quad (a > 0, n \in \mathbb{N}) , \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \quad (n = 6) .$$

Exercice 15. A l'aide de DL, calculer les limites suivantes si elles existent :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arcsin x}{x - \tan^2 x} , \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} ; \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} .$$

Exercice 16. A l'aide de D.L., calculer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les limites suivantes si elles existent

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - mx} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{m}{x-1} \right) .$$

Exercice 17. A l'aide de D.L., étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

ANNALES 2000–2001

Exercice 18. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange dans les questions suivantes.

- (a) Soit $f(x) = 3 - 2x + 4x^2 + x^3 - x^4 + x^5$. Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_5$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=0}^5 a_k (x-1)^k$.
- (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, e^x > x + 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \ln x < x - 1$.
- (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ : x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ et $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$.

Exercice 19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|e^x - x - 1| \leq \frac{1}{2} x^2 e^{|x|}$$

Exercice 20. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $|f''(t)| \leq k$ pour tout $t \in]a, b[$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange aux intervalles $[a, t]$ et $[t, b]$, montrer que pour tout $t \in]a, b[$:

$$|f'(t)| \leq \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a} + k \frac{b - a}{2}.$$

Exercice 21. Soient f et ε deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^5 + x^4 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- (a) Montrer que f admet un $DL_4(0)$.
- (b) Est-ce que f peut admettre un $DL_5(0)$? (Considérer ε de la forme x^α .)
- (c) Est-ce que f admet un $DL_3(0)$?
- (d) Prouver que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.

Exercice 22. Soit $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

- (a) Montrer que f admet un $DL_1(0)$.
- (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- (c) Montrer que f' n'admet pas de $DL(0)$ à aucun ordre.

Exercice 23. Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ définie par $f(x) = \tan(x)$.

Exercice 24. Trouver le $DL_n(0)$ des fonctions

$$f(x) = \tan x \quad (n = 5), \quad g(x) = \tan^2 x \quad (n = 6), \quad h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad (n = 4),$$

$$j(x) = \frac{x}{\sin x} \quad (n = 4), \quad k(x) = e^{\cos x} \quad (n = 6), \quad \ell(x) = \arcsin(x) \quad (n = 3).$$

Exercice 25. Calculer le $DL_4(\frac{\pi}{6})$ de $(\sin 2x)^2$.

Exercice 26. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{(\sin x)^3}.$$

Exercice 27. On considère la fonction f définie sur $] -\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Donner le $DL_4(0)$ de f .

(b) En déduire que f est continue et dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.

Exercice 28. Trouver les $DL_n(\infty)$ (D.L. généralisées au voisinage de l'infini) de

(a) $\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + x}$ ($n = 3$),

(b) $\arctan x$ ($n = 5$). (Indication : $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$).

Exercice 29. Calculer

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x-1}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad (a \in \mathbb{R}).$$