Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2003-2004

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 1 :
Espaces vectoriels

Exercice 1. (Révision du cours — à faire **avant** le premier TD !)

(a) Revoir, pour bien connaître, ***les définitions du premier cours :***

- produit cartésien d'ensembles ($E \times F$, $E_1 \times \cdots \times E_n$, E^n,...),
- groupe (loi de composition interne associative, élément neutre, symétrique),
- corps (groupe additif et multiplicatif, distributivité ; règles de calcul),
- espace vectoriel (groupe additif, multiplication scalaire, distributivité, ...).

(b) Retrouver ***les résultats du premier cours :***

- Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, on a pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
  (i) $(-\lambda)\,x = \lambda\,(-x) = -(\lambda\,x)$; (ii) $\lambda\,x = o \iff \lambda = 0 \vee x = o$.
- **Exemples fondamentaux :**
  – tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, et aussi $\mathbb{K}'$–e.v. pour tout sous-corps $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ (par exemple, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donc $\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$– et $\mathbb{Q}$–e.v.) ;
  – si E est $\mathbb{K}$–e.v., alors E^n et E^I sont $\mathbb{K}$–e.v. pour les lois définis « par composante » : $f + \lambda\,g = (f_i + \lambda\,g_i)_{i\in I}$.
  (E^I est l'ensemble des applications $f : I \to E$, ou des **familles** $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexés par I, où l'on écrit f_i au lieu de $f(i)$.)

Exercice 2. (a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, muni des lois $+$ et $\cdot$ habituelles, sauf pour $1 + 1 := 0$, est un corps.

(b) On munit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la loi $+$ habituelle et de la loi $\otimes$ définie par

$$(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) := (\, x_1\,y_1 - x_2\,y_2\, ,\, x_1\,y_2 + x_2\,y_1\,)\ .$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \otimes)$ est un corps.

Exercice 3. Dans les cas suivants, montrer que E est un $\mathbb{K}$–e.v. : préciser les lois, l'élément neutre et l'opposé de tout $x \in E$; comparer au (1b) (exemples).

(a) $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$; (b) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; (c) $E = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;
(d) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites réelles), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; (e) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ (fct de $\mathbb{C}$ ds $\mathbb{C}$), $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}_+^*$ on définit une loi $\oplus$ par $x \oplus y = xy$ et une opération de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\lambda \star x = x^\lambda$. Vérifier que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \star)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer que la distributivité entraîne que le groupe additif d'un corps ou d'un $\mathbb{K}$–e.v. est abélien. (Indication : étudier $(1 + 1)(x + y)$).
(N.B. : il est généralement quand même plus efficace d'établir *d'abord* la commutativité de la loi « + », ce qui simplifie les autres preuves.)