Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2002-2003

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés$^{(*)}$, série 1 :
Espaces vectoriels

(RP) **Exercice 1.** Bien connaître ***les définitions du premier cours :***

- **Le produit cartésien d'ensembles :** $A \times B = \{ (x,y) \; ; \; x \in A, \, y \in B \}$;
  $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ (x_1, ..., x_n) \; ; \; x_i \in A_i \quad \forall i \} \quad (= A^n$ si $A_i = A \quad \forall i)$
- $(G, *)$ est un **groupe** ssi $* : G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto x * y$ (*loi de composition interne*) admet un **élément neutre** ($\exists e \in G, \forall x \in G, \; e*x = x*e = x$), est **associative** ($\forall x,y,z \in G : x*(y*z) = (x*y)*z$), et telle que tout $x \in G$ admet un **symétrique** dans G ($\forall x \in G, \; \exists \bar{x} \in G : x * \bar{x} = \bar{x} * x = e$).
  Le groupe est **abélien** ssi $*$ est **commutative** ($\forall x,y \in G : x*y = y*x$).
  (La notion de groupe n'est utilisée ici que pour définir les corps et espaces vectoriels.)
- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un **corps** ssi $(\mathbb{K}, +)$ et $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ sont des groupes et « $\cdot$ » est **distributive** sur $+$ ($\forall x,y,z \in \mathbb{K} : x\,(y+z) = x\,y + x\,z$, $(x+y)\,z = x\,z + y\,z$).
  Pour $+$ $(\cdot)$ on note $e = 0$ $(e = 1)$ et $\bar{x} = -x$ $(\bar{x} = x^{-1})$; $x + y\,z \equiv x + (y \cdot z)$.
- $(E, +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$–**espace vectoriel** ssi $(E,+)$ est un groupe et $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ distributive sur *les* $+$, 'associative' $(\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\,\mu) \cdot x)$ et $\forall x \in E : 1 \cdot x = x$.
  On note $o = 0_E$ le **vecteur nul**, (unique) élément neutre de $(E,+)$.

(RP) **Exercice 2.** Retrouver ***les résultats du premier cours :***

(a) La distributivité entraîne que le groupe additif d'un corps ou $\mathbb{K}$–e.v. est abélien (étudier $(1+1)(x+y)$). Pour se simplifier la vie, on établit généralement quand même *d'abord* la commutativité de « $+$ ».

(b) Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, on a pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
(i) $(-\lambda)\,x = \lambda\,(-x) = -(\lambda\,x)$; (ii) $\lambda\,x = o \iff \lambda = 0 \vee x = o$.

(c) **Exemples fondamentaux :** tout corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$–e.v. (et $\mathbb{K}'$–e.v. pour tout sous-corps $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$, par exemple $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) ; si E est $\mathbb{K}$–e.v., alors E^n et E^I sont $\mathbb{K}$–e.v. pour les lois définis « par composante » : $f + \lambda\,g = (f_i + \lambda\,g_i)_{i \in I}$. ($E^I$ est l'ensemble des applications $f : I \to E$, ou des **familles** $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de E indexés par I, avec $f_i = f(i)$.)

(RP) **Exercice 3.** Se convaincre que chaque équation et notion ci-dessus est bien claire ; sinon essayer d'avoir des explications d'un camarade, de votre enseignant de T.D., ou du professeur du cours (au plus tard au prochain cours).

(AD) **Exercice 4.** Dans les cas suivants, montrer que E est un $\mathbb{K}$–e.v. : préciser les lois, l'élément neutre et l'opposé de tout $x \in E$; comparer au (2c) et (2b).

(a) $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$; (b) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; (c) $E = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;
(d) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites réelles), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; (e) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ (fct de $\mathbb{C}$ ds $\mathbb{C}$), $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(AD) **Exercice 5.** Dans $\mathbb{R}_+^*$ on définit une loi $\oplus$ par $x \oplus y = xy$ et une opération de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\lambda \star x = x^\lambda$. Vérifier que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \star)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$^{(*)}$ RP = **révision** du cours / **préparation** du T.D. (obligatoire; revu en T.D. seulement sur demande !) ; AD = **application directe** du cours ; EX = **exercice** ; PB = **problème**.