Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2
2^e semestre 2001-2002

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 1 :

Espaces vectoriels et applications linéaires

N.B.: Les exercices marqués d'une étoile sont à traiter en priorité.
Les exercices marqués d'un « § » sont un peu difficiles.

Structure d'espace vectoriel

Exercice 1. (a) Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, en précisant les lois.
(b) Montrer que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, en précisant les lois.

* **Exercice 2.** Dans $\mathbb{R}_+^*$ on définit une loi $\oplus$ par $x \oplus y = xy$ et une opération de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\lambda \star x = x^\lambda$. Vérifier que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \star)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Montrer que la commutativité de la loi $+$ est conséquence des autres axiomes définissant un espace vectoriel, notamment de la distributivité. (Indication : développer $(1+1)(x+y)$ de deux façons différentes.)

§ **Exercice 4.** Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$–ev. Montrer qu'on a pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$:
$0 \cdot x = o$; $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$; $\lambda \cdot o = o$; $\lambda \cdot x = o \iff (\lambda = 0 \vee x = o)$.

Espace vectoriel produit

Exercice 5. (a) Soit I un ensemble quelconque, E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, et E^I l'ensemble des applications de I dans E. Montrer que E^I est un $\mathbb{K}$–e.v.
* (b) En déduire que les suites de réels et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$–espaces vectoriels.
§ (c) Pour chaque $i \in I$, soit E_i un $\mathbb{K}$–ev. Montrer que les familles $x = (x_i)_{i\in I}$ avec $\forall i \in I, x_i \in E_i$, forment encore un $\mathbb{K}$–e.v. (noté $\prod_{i\in I} E_i$). Qu'obtient-on pour $I = \{1, 2\}$? Et pour $E_i = E$ (tous pareils) ?

Sous-espaces vectoriels

* **Exercice 6.** (a) Pour $E = \mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $F_a := \{(x, y, a); x, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_a est sous-espace vectoriel de E si et seulement si $a = 0$.
(b) Soit $E = \mathbb{R}^I$ le $\mathbb{R}$–e.v. des applications numériques définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On fixe $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $F_a = \{f \in E \mid f(x_0) = a\}$ est s.e.v. de E si et seulement si $a = 0$. Comparer avec le (a).

Exercice 7. Lesquels des ensembles suivants sont s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$?

(a) $C = \{f \in E \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)\}$ (fonctions croissantes)
* (b) $D = C - C = \{f \in E \mid \exists g, h \in C : f = g - h\}$
(c) $F_\alpha = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}_+ : f(-x) = \alpha f(x)\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. — Exemples ?
(d) $G = \{x \mapsto a \sin x + b \cos x; a, b \in \mathbb{R}\}$
(e) $H = \{f \in E \mid \exists M > 0 : |x| > M \Longrightarrow f(x) = 0\}$.
(f) fonctions bornées, n fois dérivables, polynômiales (de degré n).

* (g) Donner 3 autres exemples intéressants de sev de E et 2 contre-exemples.

Exercice 8. Caractériser $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, les suites nulles sauf un nombre fini d'éléments. Montrer que c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et l'identifier avec les polynômes.

§ **Exercice 9.** Soit F un s.e.v. d'un e.v. E. Montrer que $H = (E \setminus F) \cup \{0\}$ est un s.e.v. si et seulement si $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Applications linéaires

* **Exercice 10.** (a) Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x+y+z \end{array}, \quad g : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (y,x,x-2\,y) \end{array}, \quad h : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array},$$

$$j : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (a,b) \mapsto a\cdot\sin + b\cdot\cos \end{array}, \quad k : \begin{array}{c} (\mathbb{R},+,\cdot) \to (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \star) \\ x \mapsto e^x \end{array} \quad \text{(cf. exo 2)}$$

(b) Parmi f,g,h,k, lesquelles sont injectives, surjectives ?

Exercice 11. Montrer que pour des applications linéaires $f, g \in \mathcal{L}(E,E)$, les applications $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{K}$) et $g \circ f$ sont encore linéaires.
(Lesquels de ces résultats restent valables si $\mathbb{K}$ est non-commutatif ?)

Exercice 12. Définir l'application « dérivée » d'un polynôme, et montrer que c'est une application linéaire. Quel est le noyau de la « n^e dérivée » ?

* **Exercice 13.** (a) Soit $v = (v_1, v_2)$ la famille des deux vecteurs $v_1 = (0,1,1)$ et $v_2 = (1,0,-2)$. Montrer que l'application $\Psi_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ est linéaire et injective. Comparer avec g de l'exercice 10.

(b) Généraliser à une famille $(v_1, ..., v_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$–ev E.

(c) Pour une famille quelconque $v = (v_i)_{i\in I} \in E^I$ (penser aux suites $E^{\mathbb{N}}$), considérer $\Psi_v : \mathbb{K}^{(I)} \to E$ (une somme $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i$ étant bien définie ssi $\lambda_i = 0$ sauf un nombre fini de i ; revoir l'exo 8 avec $v = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$).

Exercice 14. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective sur F, et g une application de F dans G. Montrer que si $g \circ f$ est linéaire, alors g est linéare.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Montrer que l'application φ de $\mathcal{L}(\mathbb{K},E)$ dans E définie par $\varphi(f) = f(1)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

* **Exercice 16.** Soient E,F,G des $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que

$$u^* : \begin{array}{c} \mathcal{L}(F,G) \to \mathcal{L}(E,G) \\ w \mapsto w \circ u \end{array} \quad \text{et} \quad v_* : \begin{array}{c} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,G) \\ w \mapsto v \circ w \end{array} \quad \text{sont linéaires.}$$

Exercice 17. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $E_n = \{P \in E ; \deg P \le n\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(P) = XP' + P$ où P' désigne la dérivée de P.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E et que la restriction φ_n de φ à E_n est un endomorphisme de E_n.

§ (b) Montrer que φ_n est surjective.

§ (c) Déterminer les polynômes $P \in E_n$ et les scalaires λ tels que $\varphi(P) = \lambda P$. En déduire que φ est un automorphisme de E.

§ **Exercice 18.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, on pose $P(u) = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 u + ... + a_n u^n$, avec $u^k := u \circ u \circ \cdots \circ u$ (k fois).

(a) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

(b) Si u n'est pas injectif, montrer que : $\ker u \subset \ker P(u) \iff P(0) = 0$.

(c) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors $\ker P(u) \subset \operatorname{im} u$.

Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2

2^e semestre 2001-2002

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 2 :
Intersection et somme de sous-espaces, supplémentaire.

N.B.: Les exercices marqués d'une étoile sont à traiter en priorité.
Les exercices marqués d'un « § » sont un peu difficiles.

Sous-espaces de $\mathbb{R}^n$

* **Exercice 19.**

(a) Exprimer l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y + z\}$ comme noyau d'une application linéaire et en déduire que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
(On peut utiliser la notion d'application linéaire attachée à une famille.)

(b) Généraliser le (19a) pour déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $H_a = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1a_1 + ... + x_na_n = 0\}$ est s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
(Pour $a \neq o$, H_a est appelé un *hyperplan* orthogonal à a. Donner une interprétation géometrique. (Produit scalaire nul pour angle de 90°.))

(c) Montrer que $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \text{ et } y = 2z\}$ est un s.e.v., en l'exprimant comme intersection de deux s.e.v.

(d) Donner un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $D = [a]$, droite vectorielle engendrée par a. (Utiliser que $u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ (produit vectoriel) est orthogonal aux deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^3$.)

(e) Ecrire la définition de D en terme d'une seule équation vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ pour l'exprimer comme noyau d'une application linéaire.

Supplémentaires et projecteurs

Exercice 20. Montrer que $E = F \oplus G$ et donner les projecteurs p_F et p_G pour

* (a) $E = \mathbb{R}^n$, $F = [a]$, $G = H_a$ (cf. exo 19b) [résoudre $\Psi_a(v - \lambda a) = 0$],

(b) $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $F =$ fonctions paires, $G =$ fonctions impaires (cf. exo 7c),

* (c) $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $F = \{f \in E \mid f = c^{ste}\}$, $G = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$,

(d) $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \{P \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} : P = a_0 + a_2X^2 + ... + a_{2k}X^{2k}\}$,
$G = \{P \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} : P = a_1X + a_3X^3 + ... + a_{2k+1}X^{2k+1}\}$.

Exercice 21. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

(a) Montrer que l'application $s_F : x \mapsto y - z$ est un endomorphisme de E, appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(b) Montrer que $s_F = \mathrm{id}_E - 2\,p_G = 2\,p_F - \mathrm{id}_E = p_F - p_G$, ou p_X est le projecteur sur X.

§ **Exercice 22.** Soit F un sev d'un ev E, F_1 et F_2 deux supplémentaires de F dans E. Montrer que la restriction à F_2 du projecteur sur F_1 parallèlement à F, $u = p_{F_1}|_{F_2}$, est un isomorphisme de F_2 sur F_1.

Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2

2^e semestre 2001-2002

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 3 :
Familles libres et bases, applications linéaires dans $\mathbb{R}^n$

N.B.: Les exercices marqués d'une étoile sont à traiter en priorité.
Les exercices marqués d'un « § » sont un peu difficiles.

Familles libres et bases

* **Exercice 23.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (-6, 0, 2)$.

(a) Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est libre.

(b) Trouver $v_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

(c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{vect} \mathcal{B}$ pour déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 24. (a) Montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est libre dans le $\mathbb{R}$–e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(c) Montrer que la famille $(f, g) = (x \mapsto e^x, x \mapsto x^2 + 1)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

§ (d) Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$f = (x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}} \ , \quad g = (x \mapsto \cos kx)_{k\in\mathbb{N}} \ , \quad h = (x \mapsto \sin kx)_{k\in\mathbb{N}^*} \ .$$

* **Exercice 25.** Montrer qu'une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si l'un est un multiple de l'autre.

§ **Exercice 26.** Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit $\varphi_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ par $\varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

Exercice 27. Utiliser le pivot de Gauss pour trouver les relations de dépendance entre $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et une base du s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ qu'ils engendrent, pour

* (a) $u_1 = (-1, 1, -2, 3)$, $u_2 = (-2, 1, -3, 1)$,
$u_3 = (0, 1, -1, 5)$, $u_4 = (1, -2, 2, 3)$.

(b) $u_1 = e_1 + 2\,e_2 - 3\,e_3 + e_4$, $u_2 = -2\,e_1 + e_2 - e_3 + 3\,e_4$,
$u_3 = e_1 + 7\,e_2 - 10\,e_3 + 6\,e_4$, $u_4 = 5\,e_1 - e_3 - 5\,e_4$,
où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 28. (a) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_k$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{(X + a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
§ Donner les coordonnées de $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ dans cette base.
[Indiction : on peut utiliser $P = Q(X + a) \iff Q = P(X - a)$.]

Base et dimension

Exercice 29. Ecrire la base canonique de $E = \mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 2\}$. Quelle est la dimension de E ? Soient a, b, c des paramètres réels. On pose

$$P_0(X) = -1,\ P_1(X) = 2X + a,\ P_2(X) = -X^2 + 2bX - c\ .$$

Montrer que $\{P_0, P_1, P_2\}$ forme une base de E.

Exercice 30. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que $E \times F$ est de dimension finie et que $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Applications linéaires en dimension finie

* **Exercice 31.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (4x - y, -x + 52z)$.

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer $\ker f$, en donner une base.

(c) Déterminer une partie génératrice de $\operatorname{im} u$, puis une base de $\operatorname{im} u$.

Exercice 32. (a) Montrer que $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ est linéaire, lorsque

$$u(x, y, z) = (\ 5x + 2y - z\ ,\ -8x - 3y + 2z\ ,\ -x - 2y + 3z\ ,\ 3x - y - 5z\ )\ .$$

(b) Montrer que $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y = 0\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer $u(V)$, l'image de V par u.

Exercice 33. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $u(-1, 2, 0) = (1, 0)$, $u(0, 1, 1) = (0, 1)$, $u(1, 1, 1) = (1, 1)$. Calculer $u(x, y, z)$ pour (x, y, z) arbitraire dans $\mathbb{R}^3$.

Dimension et rang

Exercice 34. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ définie par

$$f(e_1) = \alpha e_1 + 2\,e_2 + 3\,e_3\ ;\quad f(e_2) = i\,e_2 + \alpha e_3\ ;\quad f(e_3) = e_2 + 5\,e_3\ .$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

(a) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, calculer $f(x, y, z)$.

(b) Déterminer $\ker(f)$, $\operatorname{im}(f)$ ainsi qu'une base pour chacun de ces sev selon les valeurs de α. Préciser, pour chaque cas, le rang de f.

Exercice 35. Soient E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \in E$ tels que $(f(a), f^2(a), ..., f^n(a))$ soit libre. Montrer que $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E et que f est un automorphisme de E.

Exercice 36. Soient E un ev de dimension finie et F un sev de E.

(a) Montrer que si F est de dimension finie, alors pour tout $u \in L(E)$,

$$F \subset u(F) \Longrightarrow F = u(F)\ .$$

(b) Donner un contre-exemple quand F n'est pas de dimension finie.

Exercice 37. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = u \circ u = \lambda\, u$.

Exercice 38. Soient E un ev, E_1 et E_2 deux sev de E. On considère l'application $\varphi : E_1 \times E_2 \to E$ définie par $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(a) Montrer que $\ker \varphi = \{(x, -x)\ ;\ x \in E_1 \cap E_2\}$.
En déduire que $\ker \varphi$ et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes.

(b) En utilisant l'exercice 30, montrer que

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

§ **Exercice 39.** Monter que $\Psi : \mathbb{K}^n \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$; $a \mapsto \Psi_a$ est un isomorphisme (avec $\Psi_a : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 a_1 + ... + x_n a_n$ pour $a = (a_1, ..., a_n)$. [Indication : utiliser la base canonique de $\mathbb{K}^n$ pour montrer la surjectivité.]

Exercice 40. Soit $E = C^0([0,1];\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n la forme linéaire définie sur E par $\varphi_n(f) = \int_0^1 t^n\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que si f est une fonction positive de E, alors $\varphi_0(f) = 0$ entraîne $f = 0$. (Indication : considérer une primitive de f sur $[0,1]$).
En déduire que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

(b) Soit $u : E \to (\mathbb{R}^{n+1})^*$; $f \mapsto u(f) = (\varphi_0(f), ..., \varphi_n(f))$. Montrer que u est surjective.
[Ind. : appliquer le résultat de l'exercice 43 au sev $F = \operatorname{im} u$ et utiliser l'exercice 39.]

Exercice 41. (a) Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f_1 et f_2 deux formes linéaires sur E. Montrer que $\ker f_1 = \ker f_2$ si et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : f_1 = \lambda f_2$.

(b) Soit $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4;\ x_1 - ix_4 = 0 \text{ et } x_1 + ix_2 - x_3 = 0\}$. Quelles sont à priori les valeurs possibles pour $\dim V$? Montrer en utilisant (41a) que $\dim V \leq 2$.

(c) Donner une base de V.

§ **Exercice 42.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Un élément x de $E = \mathbb{K}^n$ est noté $x = (x_1, ..., x_n)$. Soit $a \in \mathbb{K}^n$ et $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ tels que $\varphi(x) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$. On pose $H = \{x \in \mathbb{K}^n,\ \varphi(x) = 0\}$.

(a) Montrer que si $H \neq E$, alors H est un sev de E possédant une base de $n - 1$ éléments.

(b) Caractériser les supplémentaires de H.

§ **Exercice 43.** Soient E un ev et F un sev de E tels que : $\forall \varphi \in E^* \setminus \{o\}$, $\varphi|_F \neq o$. Montrer que $F = E$. (Indication : si E' est un supplémentaire de F tel que $E' \neq \{o\}$ et si $a \in E'$, considérer $\psi \in E^*$ tel que $\psi(a) \neq 0$).

Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2

2^e semestre 2001-2002

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 4 :
Calcul matriciel

N.B.: Les exercices marqués d'une étoile sont à traiter en priorité. Les exercices marqués d'un « § » sont un peu difficiles.

* **Exercice 44.** On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\; D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\; E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins cinq.

(b) Parmi les matrices A, B, C, D, E et leurs produits, lesquelles sont carrées et lesquelles sont symétriques ?

Exercice 45. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées symétriques d'ordre n est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

(b) Le produit de deux matrices symétriques est-il symétrique ?

Exercice 46. Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques sont des s.e.v. supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (Indication : considérer $\frac{1}{2}(A \pm {}^tA)$.)

* **Exercice 47.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la famille $(E_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ des matrices E_{ij} ayant tous les éléments nuls sauf celui situé sur la i^e ligne dans la j^e colonne, qui vaut 1. Ainsi toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, E_{ij}$. (1)

(a) Montrer que

$$E_{ij} \cdot E_{k\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ E_{i\ell} & \text{si} \quad j = k \end{cases} .$$

Utiliser ce résultat pour calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Calculer et interpréter les produits $A \cdot E_{ij}$ et $E_{ij} \cdot A$.

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $P_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ ($I = I_n =$ matrice unité). Déduire du (47b) une interprétation des produits $A \cdot P_{ij}(\lambda)$ et $P_{ij}(\lambda) \cdot A$.

(d) Déduire de la question précédente une expression de la matrice inverse de $P_{ij}(\lambda)$, c'est-à-dire $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $P_{ij}(\lambda) \cdot Q = Q \cdot P_{ij}(\lambda) = I$, et confirmer le résultat par calcul explicite, en développant ces produits.

* **Exercice 48.** Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix} \quad , \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \; .$$

(a) Montrer que $M(a,b,c)$ peut s'écrire $M(a,b,c) = aI + bJ + cK$ où $I = I_3$, J et K étant indépendants de a, b et c. En déduire que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel dont on donnera la dimension.

(b) Calculer J^2, JK, KJ, K^2 en fonction de I, J et K. En déduire que E est stable pour la multiplication matricielle.

Exercice 49. Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.

(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Si D et D' sont deux éléments de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, montrer que $DD' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

(c) Montrer que $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Déterminer dans ce cas D^{-1}.

(d) Si $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, calculer D^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 50. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \cdot B = 0$. Si l'une des matrices est non-nulle, montrer (par l'absurde) que l'autre n'est pas inversible.

Exercice 51. Calculer le produit de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

En déduire A^{-1} lorsque le *déterminant* $\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} ad - bc$ est non-nul.

Inversion de matrices, Méthode de Gauss

Exercice 52. En utilisant la méthode de Gauss, étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer éventuellement leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

* **Exercice 53.** Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer l'inverse lorsqu'il existe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; , \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} .$$

* **Exercice 54.** Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
En déduire que B, C, D sont inversibles et calculer B^{-1}, C^{-1}, D^{-1}.

Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt de Mathématiques et Informatique
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 1^e année
Module MIP2

2^e semestre 2001-2002

Algèbre Linéaire — Travaux Dirigés, série 5 :
Matrices et applications linéaires ; systèmes linéaires

N.B.: Les exercices marqués d'une étoile sont à traiter en priorité.
Les exercices marqués d'un « § » sont un peu difficiles.

* **Exercice 55.** Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) Calculer $f(b_i)$ pour $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (0, 2, -1)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

(b) i. Démontrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   ii. Déterminer $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. En déduire que f est bijective.

(c) i. Calculer N^2 pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire N^k pour $k \geq 2$.
   ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T^n en fonction de n et N, puis en fonction de n uniquement. En déduire A^n en fonction de n.

Exercice 56. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) i. Calculer $A^2 - 4\,A + 3\,I$ où $I = I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
   ii. Calculer A^{-1} par la méthode de Gauss.

§ (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4\,X + 3$. En déduire une expression de A^n en fonction de A et I puis en fonction de n.

(c) Entraînement : prendre $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$ pas forcément tous distincts, et une matrice B inversible (par exemple A de l'exo. 55 ou 56). Refaire l'exercice avec $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$ et le polynôme $P = \prod_{r \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}} (X - r)$ au lieu de $X^2 - 4X + 3$.

Exercice 57. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère l'application φ qui à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\varphi(M) = \begin{pmatrix} a-b & d-c \\ c-d & b-a \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme.

(b) Touver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Donner une base de chacun des sous-espaces $\mathrm{im}\,\varphi$ et $\ker \varphi$.

(d) Ecrire la matrice de la restriction de φ à $\mathrm{im}\,\varphi$ dans la base précédente.

Exercice 58. Dans $E = \mathbb{R}_1[X]$, on considère les polynômes $P_1 = 2X - 1$ et $P_2 = X + 1$. Montrer qu'ils forment une base de E. Ecrire la matrice M de l'application linéaire $D : P \mapsto P'$ dans cette base (P' désigne la dérivée de P). Montrer de deux façons différentes que $M^2 = 0$.

Exercice 59. (a) Soit $b_1 = (2, 1, -1)$, $b_2 = (2, -1, 2)$, $b_3 = (3, 0, 1)$. Montrer que $(b) = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $U(x, y, z) = (-2x + y - z, x - 2y, 3x + 2y - z)$. Trouver la matrice de U dans la base (b).

(c) Soit (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit $w_1 = -f_1 + f_2$; $w_2 = f_1 + f_2$. Vérifier que $(w) = (w_1, w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

* (d) Soit $V \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $V(x, y, z) = (4x - y + z, x - 3y - z)$. Trouver la matrice de V par rapport aux bases (b) et (w).

Systèmes linéaires

Exercice 60. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

* (a) dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = a \\ 3x - y + z = b \\ -2x - 3y - 10z = c \end{cases} \quad \text{en fonction de } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

(b) dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x - y - z + t = -2 \\ 3x - y - 2z + t = 1 \end{cases}$$

Exercice 61. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel a le système :

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a^2 + 2a \\ x + (a+1)y + z = a^3 + 2a^2 \\ x + y + (a+1)z = a^4 + 2a^3 \end{cases}$$

Exercice 62. Soient $u = (2, 2, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (3, 4, 3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Trouver les conditions sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $xu + yv + zw = (a, b, c)$.

* **Exercice 63.** Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y + z + 2t + 4u = 4 \\ -3y + 3z + t + 4u = 3 \\ -x - 2y + z + 5u = 1 \\ 3x + 3y + 2t - u = 3 \end{cases}$$

Exercice 64. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère la famille (u, v, w) avec $u = (1, -1, -1)$; $v = (-1, 1, -1)$; $w = (-1, -1, 1)$.

(a) Calculer les coordonnées (x, y, z) du vecteur $\xi\, u + \eta\, v + \zeta\, w$ dans la base canonique en fonction de ξ, η, ζ.

(b) Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées (ξ, η, ζ) du vecteur $x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$ dans la base (u, v, w).