Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique, Campus de Fouillole
Département Scientifique Interfacultaire, Campus de Schoelcher

DEUG MIAS & MASS — **Module MIP2 / MIE2** — 2^e semestre 2000-2001

Travaux Dirigés : Algèbre Linéaire — Série 1

Espaces vectoriels et Applications linéaires

Exercice 1. Soit $(E, +, \star)$ un $\mathbb{K}$–ev. Montrer que l'on a pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$0 \star x = o\ , \quad (-\lambda) \star x = -(\lambda \star x)\ , \quad \lambda \star o = o\ , \quad \text{et : } \lambda \star x = o \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = o)\ .$$

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_+^*$ on définit une loi $\oplus$ par $x \oplus y = xy$ et une opération de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\lambda \star x = x^\lambda$. Vérifier que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \star)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Pour $i \in \{1, 2\}$, soient $(E_i, \oplus_i, \star_i)$ des $\mathbb{K}$–ev. Montrer que $E = E_1 \times E_2$, muni de l'addition $+$ et multiplication scalaire $\star$ « composante par composante », est un $\mathbb{K}$–ev. (Cet « espace vectoriel produit » se généralise à un produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ quelconque.)

Exercice 4. Montrer que la commutativité de la loi $+$ est une conséquence des autres axiomes définissant un espace vectoriel. [Ind. : developper $(1+1)(x+y)$ de deux façons différentes.]

Exercice 5. Soit E le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}$. Soient f et g les applications définies par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \cos 2x$.
Montrer que si α et β sont des réels tels que $\alpha f + \beta g = 0_E$, alors $\alpha = \beta = 0$.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par C l'ensemble des applications croissantes de E. Soit $F = \{f \in E \mid \exists g, h \in C : f = g - h\}$. Vérifier que F est un $\mathbb{R}$-ev pour les lois de E.

Exercice 7. Soit E un ev, A un sous-espace propre de E, c'est-à-dire $A \neq \{0\}$ et $A \neq E$.
Montrer que $(E \setminus A) \cup \{0\}$ n'est pas un sev de E.

Exercice 8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications numériques définies sur I. On désigne par F le sous-ensemble de E formé des fonctions f telles que $f(x_0) = a$ où a est donné. Montrer qu'il existe une seule valeur de a pour laquelle F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 9. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev, f une application linéaire surjective de E dans F et g une application de F dans G. Montrer que si $g \circ f$ est linéaire, alors g est linéare.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $E_n = \{P \in E; \deg P \leq n\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(P) = XP' + P$ où P' désigne la dérivée de P.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E et que la restriction φ_n de φ à E_n est un endomorphisme de E_n.

(b) Montrer que φ_n est surjective.

(c) Déterminer les polynômes $P \in E_n$ et les scalaires λ tels que $\varphi(P) = \lambda P$.
En déduire que φ est un automorphisme de E.

Exercice 11. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que les applications $\begin{array}{rl} u^* : \mathcal{L}(F,G) & \to \mathcal{L}(E,G) \\ w & \mapsto w \circ u \end{array}$ et $\begin{array}{rl} v_* : \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{L}(E,G) \\ w & \mapsto v \circ w \end{array}$ sont linéaires.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Montrer que l'application φ de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ dans E définie par $\varphi(f) = f(1)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $u^0 = \mathrm{id}_E$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = u \circ u^{k-1}$. Pour $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(u) = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 u + ... + a_n u^n$.

(a) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

(b) Montrer que si u n'est pas injectif alors : $\ker u \subset \ker P(u) \iff P(0) = 0$.

(c) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors $\ker P(u) \subset \operatorname{im} u$.

Exercice 14. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

(a) Montrer que l'application $s_F : x \mapsto y - z$ est un endomorphisme de E, appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(b) Montrer que $s_F = \mathrm{id}_E - 2\, p_G = 2\, p_F - \mathrm{id}_E = p_F - p_G$, ou p_X est le projecteur sur X.

Exercice 15. Soit F un sev d'un ev E, F_1 et F_2 deux supplémentaires de F. Montrer que la restriction u à F_2 du projecteur sur F_1 parallèlement à F est un isomorphisme de F_2 sur F_1.

Exercice 16. Soient E un ev et F un sev de E tels que : $\forall \varphi \in E^* \setminus \{o\}$, $\varphi|_F \neq o$.
Montrer que $F = E$. (Indication : si E' est un supplémentaire de F tel que $E' \neq \{o\}$ et si $a \in E'$, considérer $\psi \in E^*$ tel que $\psi(a) \neq 0$).

Exercice 17. Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

(a) $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$.

(b) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k(x) = \sin kx$ et $g_k(x) = \cos kx$.

Exercice 18. Soit $(P_k)_k$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $(P_k)_k$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{(X + a)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner les coordonnées de P dans cette base.

Exercice 19. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $u(-1, 2, 0) = (1, 0)$, $u(0, 1, 1) = (0, 1)$, $u(1, 1, 1) = (1, 1)$. Calculer $u(x, y, z)$ pour (x, y, z) arbitraire dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20. Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on note φ_a l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ défini par $\varphi(P) = P(a)$. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un élément x de $E = \mathbb{K}^n$ est noté $x = (x_1, ..., x_n)$. Soit $a \in \mathbb{K}^n$ et $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ tels que $\varphi(x) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$. On pose $H = \{x \in \mathbb{K}^n,\ \varphi(x) = 0\}$.

(a) Montrer que si $H \neq E$, alors H est un sev de E possédant une base de $n-1$ éléments.

(b) Caractériser les supplémentaires de H.

Exercice 22. On note $x = (x_1, ..., x_n)$ l'élément générique de $\mathbb{K}^n$. A tout $a \in \mathbb{K}^n$ on associe $\varphi_a \in \mathcal{A}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ définie par $\varphi_a(x) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$.
Monter que $\varphi_a \in (\mathbb{K}^n)^*$ et que $\varphi : \mathbb{K} \to (\mathbb{K}^n)^*$; $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme.
[Indication : utiliser la base canonique de $\mathbb{K}^n$ pour montrer la surjectivité.]

Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique, Campus de Fouillole
Département Scientifique Interfacultaire, Campus de Schoelcher

DEUG MIAS & MASS — **Module MIP2 / MIE2** — 2^e semestre 2000-2001

Travaux Dirigés : Algèbre Linéaire — Série 2

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 23. Soit $E = C^0([0,1];\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n la forme linéaire définie sur E par $\varphi_n(f) = \int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que si f est une fonction positive de E, alors $\varphi_0(f) = 0$ entraîne $f = 0$. (considérer une primitive de f sur $[0,1]$). En déduire que $(\varphi_n)_n$ est libre.

(b) Soit $u : E \to (\mathbb{R}^{n+1})^*$; $f \mapsto u(f) = (\varphi_0(f), ..., \varphi_n(f))$. Montrer que u est surjective. [Ind. : appliquer le résultat de l'exercice 16 au sev $F = \operatorname{im} u$ et utiliser l'exercice 22.]

Exercice 24. (a) Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f_1 etf_2 deux formes linéaires sur E. Montrer que $\ker f_1 = \ker f_2$ si et seulement si : $\exists\lambda \in \mathbb{K}^*$, $f_1 = \lambda f_2$.

(b) Soit $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 ;\, x_1 - ix_4 = 0 \text{ et } x_1 + ix_2 - x_3 = 0\}$. Quelles sont à priori les valeurs possibles pour $\dim V$? Montrer en utilisant (24a) que $\dim V \leq 2$.

(c) Donner une base de V.

Exercice 25. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,2,0)$ et $v_2 = (-6,0,2)$.

(a) Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est libre.

(b) Compléter la partie $\{v_1, v_2\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 26. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq 2\}$. On pose

$$P_0(X) = -1,\ P_1(X) = 2X + a,\ P_2(X) = -X^2 + 2bX - c\ .$$

où a, $b\,c$ sont des paramètres réels. Ecrire la base canonique de E. Quelle est la dimension de E ? Montrer que $\{P_0, P_1, P_2\}$ forme une base de E.

Exercice 27. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (4x - y, -x + 52z)$.

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer $\ker f$, en donner une base.

(c) Déterminer une partie génératrice de $\operatorname{im} u$, puis une base de $\operatorname{im} u$.

Exercice 28. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. On désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned}
u_1 &= e_1 + 2e_2 - 3e_3 + e_4\\
u_2 &= -2e_1 + e_2 - e_3 + 3e_4\\
u_3 &= e_1 + 7e_2 - 10e_3 + 6e_4\\
u_4 &= 5e_1 - e_3 - 5e_4
\end{aligned}$$

Déterminer une base de F. (On précisera les relations de dépendance entre les u_i).

Exercice 29. (a) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimensions finies m et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ des bases respectives de E et F.
Déterminer une base de $E \times F$; en déduire la dimension de $E \times F$.

(b) Soient E un ev, E_1 et E_2 deux sev de E. On considère l'application $\varphi : E_1 \times E_2 \to E$ définie par $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

i. Montrer que $\ker \varphi = \{(x, -x);\ x \in E_1 \cap E_2\}$. En déduire que $\ker \varphi$ et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes.

ii. En utilisant (29a), montrer que

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Exercice 30. (a) Montrer que l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x, y, z) \ = \ (\ 5x + 2y - z\ ,\ -8x - 3y + 2z\ ,\ -x - 2y + 3z\ ,\ 3x - y - 5z\ )$$

est linéaire.

(b) Montrer que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 5y = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer $u(V)$, l'image de V par u.

Exercice 31. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ définie par

$$f(e_1) = \alpha e_1 + 2e_2 + 3e_3;\ f(e_2) = ie_2 + \alpha e_3;\ f(e_3) = e_2 + 5e_3.$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

(a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, calculer $f(x, y, z)$.

(b) Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{im}(f)$ ainsi qu'une base pour chacun de ces sev selon les valeurs de α. Préciser, pour chaque cas, le rang de f.

Exercice 32. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = (-1, 1, -2, 3);\ u_2 = (-2, 1, -3, 1);\ u_3 = (0, -1, 1, 5);\ u_4 = (1, -2, 2, 3).$$

Déterminer une base de F. (On précisera les relations de dépendance entre les u_i).

Exercice 33. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que $E \times F$ est de dimension finie et que $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Exercice 34. Soient E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \in E$ tels que $(f(a), f^2(a), ..., f^n(a))$ soit libre. Montrer que $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E et que f est un automorphisme de E.

Exercice 35. Soient E un ev de dimension finie et F un sev de E.

(a) Montrer que si F est de dimension finie, alors :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ (F \subset u(F) \Rightarrow F = u(F)).$$

(b) Donner un contre-exemple quand F n'est pas de dimension finie.

Exercice 36. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique, Campus de Fouillole
Département Scientifique Interfacultaire, Campus de Schoelcher

DEUG MIAS & MASS — **Module MIP2 / MIE2** — 2^e semestre 2000-2001

Travaux Dirigés : Algèbre Linéaire — Série 3

Calcul matriciel

Exercice 37. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Effectuer, si possible, les produits matriciels suivants :

$$AB; BA; AC; CA; AE; EA; EB; BE; CD; DC.$$

(b) Parmi les matrices précédentes, lesquelles sont symétriques ?

Exercice 38. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées symétriques d'ordre n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le produit de deux matrices symétriques est-il symétrique ?

Exercice 39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par E_{ij} l'élément de rang (i, j) de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; tous les coefficients de E_{ij} sont nuls sauf celui situé à la position (i, j) (i-éme ligne et j-ème colonne), qui vaut 1. Ainsi toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

(a) Montrer que

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{il} & \text{si } j = k \end{cases}.$$

Utiliser ce résultat pour calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Pour $i \neq j$, calculer les produits $A.E_{ij}$ et $E_{ij}.A$. En déduire une interprétation des produits $A(I + \lambda E_{ij})$ et $(I + \lambda E_{ij})A$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $I = I_n$.

Exercice 40. Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix}$ et notées $M(a, b, c)$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $M(a, b, c)$ peut s'écrire $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$ où $I = I_3$, J et K étant indépendants de a, b et c. En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on donnera la dimension.

(b) Calculer J^2, JK, KJ, K^2 en fonction de I, J et K. En déduire que E est stable pour la multiplication matricielle.

Exercice 41. Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. Montrer que

(a) L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Si D et D' sont deux élément de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, alors $DD' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

(c) Une matrice D diagonale est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Déterminer alors D^{-1}.

(d) Si $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, calculer D^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 42. Soit (e) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$A = Mat(f;(e)) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $f(u)$ où $u = e_1 + e_2 + 2e_3$.

(b) On pose $v = 3e_2 + 2e_3$ et $(\epsilon) = \{u, v, e_3\}$.

i. Démontrer que (ϵ) est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Déterminer $T = Mat(f,(\epsilon))$. En déduire que f est bijective

(c) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Calcuer N^2. En déduire N^k pour $k \geq 2$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T^n en fonction de n et N, puis en fonction de n uniquement. En déduire A^n en fonction de n.

Exercice 43. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) i. Calculer $A^2 - 3A + 2I$ où $I = I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

ii. Calculer A^{-1} par la méthode de Gauss.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. En déduire une expression de A^n en fonction de A et I puis en fonction de n.

Exercice 44. Dans $E = \mathbb{R}_1[X]$, on considère les polynômes $P_1 = 3X + 2$ et $P_2 = 2X + 3$. Montrer qu'ils forment une base de E. Ecrire la matrice M de l'application linéaire $\varphi : P \mapsto P'$ dans cette base (P' désigne la dérivée de P). Montrer de deux façons différentes que $M^2 = 0$.

Exercice 45. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère l'application φ qui à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\varphi(M) = \begin{pmatrix} a-b & d-c \\ c-d & b-a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme.

b) Touver la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Donner une base de chacun des sous-espaces $\operatorname{im}\varphi$ et $\ker\varphi$.
d) Ecrire la matrice de la restriction de φ à $\operatorname{im}\varphi$ dans la base précédente.

Exercice 46. En utilisant la méthode de Gauss, étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer éventuellement leurs inverses :

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \ B = \left(\begin{array}{rr} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{array}\right), \ C = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{array}\right), \ D = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Exercice 47. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 48. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
En déduire que B, C, D sont inversibles et calculer B^{-1}, C^{-1}, D^{-1}.

Systèmes linéaires

Exercice 49. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

(a) dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 17x + 6y - 5z = c \end{cases} \qquad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

(b) dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x - y - z + t = 1 \\ 3x - y - 2z + t = 2 \end{cases}$$

Exercice 50. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètres réel a le système :

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a^2 + 3a \\ x + (a+1)y + z = a^3 + 3a^2 \\ x + y + (a+1)z = a^4 + 3a^3 \end{cases}$$

Exercice 51. Soient $u = (1,1,2)$, $v = (3,0,1)$, $w = (5,2,5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Trouver les conditions sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $xu + yv + zw = (a,b,c)$.

Exercice 52. Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z + 6t + u = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 3t = 0 \\ 4x + 11y - 13z + 16t - u = 0 \\ 7x - 2y + z + t - 2u = 0 \end{cases}$$

Exercice 53. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère la famille (u, v, w) avec $u = (2,1,1)$; $v = (1,2,1)$; $w = (1,1,2)$.

(a) Calculer les coodonnées (x,y,z) du vecteur $\xi\, u + \eta\, v + \zeta\, w$ dans la base canonique en fonction de ξ, η, ζ.

(b) Démontrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées (ξ, η, ζ) du vecteur $xe_1 + ye_2 + ze_3$ dans la base (u,v,w).

Exercice 54. (a) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $v_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$; $v_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$; $v_3 = 3e_1 + e_3$. Montrer que $(v) = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $U(x,y,z) = (-2x+y-z, x-2y, 3x+2y-z)$. Trouver la matrice de U dans la base (v).

(c) Soit (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit $w_1 = -f_1 + f_2$; $w_2 = f_1 + f_2$. Vérifier que $(w) = (w_1, w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(d) Soit V l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $V(x,y,z) = (4x - y + z, x - 3y - z)$. Trouver la matrice de V par rapport aux bases (v) et (w).