Introduction au calcul scientifique

(T.P. du module LMB3 — licence de mathématiques)

chap. 3 : interpolation

Maximilian F. Hasler (`mhasler@univ-ag.fr`)

Département Scientifique Interfacultaire de l'Université Antilles–Guyane,
Campus de Schoelcher, B.P. 7209, 97275 Schoelcher cedex

9 octobre 2002

Table des matières

---

3 Interpolation polynômiale

On considère dans ce chapitre la construction de fonctions polynômiales qui approchent une fonction donnée f en un sens à préciser. L'intérêt est la manipulation aisée de fonctions polynômiales : stockage dans l'ordinateur, calcul de dérivée et de primitive, etc. En effet, ces formules d'interpolation nous serviront aussi pour construire des formules d'intégration dans le chapitre suivant.

3.1 Polynôme de Lagrange

Pour approcher une fonction connue f, on peut se proposer de trouver un polynôme qui prend en certains points x_i la valeur $y_i = f(x_i)$. Parfois, la fonction f n'est pas connue et on n'a que les y_i (mesures expérimentales,...) ; il sera aisé d'adapter tout ce qui suit à ce cas, en remplaçant $f(x_i)$ par y_i.

Théorème 3.1.1 *Le polynôme de degré minimal qui passe par un ensemble de points $E = \{(x_i, y_i); i = 1...n\}$ donné (avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$), est le* **polynôme de Lagrange***,*

$$P_E(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, L_i(x) \quad \textit{avec} \quad L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\ ,$$

de degré inférieur ou égal à $n-1$.
(Ce polynôme est parfois aussi noté L_E ou L_{n-1} pour indiquer son degré.)

Exemple 3.1.2 *Pour $E = \{(-1, 1), (0, -1), (1, 2)\}$, on a*

$$\begin{aligned} P_E(x) &= y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) \\ &= 1 \cdot \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} + (-1) \cdot \frac{x+1}{0+1} \cdot \frac{x-1}{0-1} + 2 \cdot \frac{x+1}{0+1} \cdot \frac{x-0}{1-0} \end{aligned}$$

Démonstration: Pour voir que P_E passe bien par les points de E, on observe que les polynômes L_i ont l'agréable propriété que[1]

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] :\ L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\ ,$$

car pour $x = x_j$ un des facteurs s'annule, et pour $x = x_i$ tout les facteurs sont égaux à 1. Ainsi, $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, P_E(x_i) = y_i$. La définition des L_i montre

[1] On utilise la notation $[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

immédiatement qu'ils sont tous de degré $n-1$, on a donc aussi $P_E \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. (Dans des cas particuliers on peut avoir $\deg P_E < n-1$, par exemple si tous les points de E sont sur une droite, $\deg P_E \leq 1$; P_E est une constante si tous les y_i sont égaux.)

Pour démontrer l'unicité de ce polynôme, supposons qu'il y ait un autre polynôme $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!] : Q(x_i) = y_i$. Le polynôme $R = P - Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ admet donc les n racines $x_1, ..., x_n$ (car $R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = y_i - y_i$) ; mais comme $\deg R < n$, celà implique $R = 0$, donc $Q = P$. □

Remarque 3.1.3 (autre démonstration de l'existence et unicité de P_E) *On peut aussi considérer l'application* linéaire *(exercice !)*

$$\Phi_E : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \ ; \quad P \mapsto (P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n)) \ .$$

On a $\forall i \in [\![1,n]\!] : \Phi_E(L_i) = e_i$, où $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, donc $\operatorname{rang} \Phi_E = n \iff \Phi_E$ *surjective* $\iff \Phi_E$ *injective, car* $\dim \mathbb{K}_{n-1}(\mathbb{R}) = n = \dim \mathbb{R}^n$*. La surjectivité de Φ_E est équivalent à l'existence, son injectivité à l'unicité du polynôme d'interpolation $P_E \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.*

3.2 Forme de Newton du polynôme de Lagrange

Si on a déjà calculé le polynôme d'interpolation passant par les points $(x_i, y_i)_{i=1...n}$, et on souhaiterait trouver un polynôme passant par un point de plus (x_{n+1}, y_{n+1}), il faut à priori recalculer tout le polynôme de Lagrange. Il est souhaitable de pouvoir utiliser les calculs fait pour les n premiers termes et juste ajouter le terme nécessaire pour passer par le point supplémentaire.

C'est l'intérêt de la **forme de Newton** du polynôme de Lagrange,

$$P_E = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \pi_k(x) \quad \text{avec} \quad \pi_k = \prod_{j=1}^{k-1} (x - x_j) \quad (\ \pi_1 = 1 \ )$$

où les coefficients c_k sont donnés par les ***différences divisées*** $c_k = [x_1, ..., x_k]$ définis de manière récursive par

$$[x_i] := y_i \ , \quad [x_i, ..., x_k] := \frac{[x_i, ..., x_{k-1}] - [x_{i+1}, ..., x_k]}{x_i - x_k} \ (k > i) \ .$$

Remarque 3.2.1 *Dans le cas particulier ou $y_i = f(x_i)$ (c'est-à-dire on interpole une fonction f connue en les points x_i), on écrit aussi $f[...]$ au lieu de $[...]$; ainsi en particulier $f[x_i] = f(x_i)$.*

Exemple 3.2.2 *Dans le cas de 3 points, on a donc*

$$P_E = [x_1] + [x_1, x_2] \cdot (x - x_1) + [x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_1)(x - x_2) \ ,$$

avec

$$[x_1] = y_1 \ , \quad [x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \ , \quad [x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} - \frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}}{x_1 - x_3} \ .$$

On voit tout de suite que cette écriture de P_E est plus économique que celle de Lagrange, pourvu qu'on trouve une manière simple de calculer les différences divisées dans la pratique.

Pour faire cela, on établit le schéma suivant :

i	x_i	$[x_i]$	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$	$\cdots$
1	x_1	y_1			
			$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$		
2	x_2	y_2		$\frac{[x_1,x_2]-[x_2,x_3]}{x_1-x_3}$	
			$\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$		$\frac{[x_1,x_2,x_3]-[x_2,x_3,x_4]}{x_1-x_4}$
3	x_3	y_3		$\frac{[x_2,x_3]-[x_3,x_4]}{x_2-x_4}$	
			$\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}$		$\cdots$
4	x_4	y_4		$\cdots$	
$\cdots$					

Ainsi, si on ajoute un $(n+1)^e$ couple (x_{n+1}, y_{n+1}) par lequel le polynôme doit passer, il suffit de rajouter une dernière ligne à ce tableau pour écrire le terme qu'il faut ajouter au polynôme P_E.

Remarque 3.2.3 *De la définition, on voit facilement que l'on a aussi les relations*

$$[x_1, ..., x_k] = \frac{[x_2, ..., x_k] - [x_1, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_1} = [x_k, ..., x_1]$$

(récurrence immédiate pour la dernière égalité : exercice !). En pratique, les x_i sont souvent rangés par ordre croissant ; dans ce cas l'utilisation de cette formule évite d'avoir les dénominateurs négatifs.

Exercice 3.2.4 *Ecrire la forme de Newton du polynôme de Lagrange passant par $(x, y) \in \{(1,3), (2,2), (5,1), (7,4), (8,3)\}$.*

Exercice 3.2.5 *Pour $y_i \equiv f(x_i)$, on écrit aussi $f[x_1, ..., x_n]$ au lieu de $[x_1, ..., x_n]$, avec $f[x] = f(x)$, etc. Montrer que $f[x, x] := \lim_{x' \to x} f[x, x'] = f'(x)$, puis calculer $f[x, x, x']$ puis $f[x, x, x]$ définis de façon analogue.*

Solution: $\lim_{h\to 0} f[x,x+h] = f'(x)$ par définition. On pose $f[x,x,x'] = \lim_{h\to 0} f[x+h,x,x'] = \frac{f[x,x']-f'(x)}{x'-x}$ et $f[x,x,x] = \lim_{h\to 0} f[x,x,x+h]$. Pour $f \in \mathbb{C}^2$ et $h = x'-x$, on a $f[x,x+h] = \frac{h\cdot f'(x)+\frac{1}{2}h^2\cdot f''(x)+o(h^2)}{h}$ d'où $f[x,x,x+h] = \frac{\frac{1}{2}hf''(x)+o(h)}{h} = \frac{1}{2}f''(x)+o(1)$, c'est-à-dire $f[x,x,x] = \frac{1}{2}f''(x)$.

Remarque 3.2.6 *On a donc trouvé $f[x,x,x] = \frac{1}{2}f''(x)$. On obtient ce même résultat à partir de $f[x,y,z]$ indépendant de l'ordre dans lequel on prend les limites $z \to y, y \to x$ ou $z \to x, y \to x$. Il en est de même pour $f[x,y,z,t] \rightsquigarrow f[x,x,x,x] = \frac{1}{6}f'''(x)$ etc., encore une fois quel que soit l'ordre dans lequel on prend les limites. En fin de la section suivante, on trouve une démonstration de cette formule au rang n, mais valable seulement pour $\lim_{h\to 0}$ dans le cas ou $y = x+h, z = y+h, t = z+h$.*

3.3 [Complément : Opérateurs de différences finies]

Définition 3.3.1 *Soit f une fonction numérique. On définit l'opérateur de déplacement E et ses puissances par*

$$Ef(x) = f(x+1)\ ,\quad E^h f(x) = f(x+h)\ (h\in\mathbb{R})\ ,\quad I := E^0\ \ \textit{op. identité}\ .$$

Les opérateurs de différences finies sont définis $\forall h \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \Delta_h &= E^h - I : & \Delta_h f(x) &= f(x+h) - f(x) & (1)\\ \nabla_h &= I - E^{-h} : & \nabla_h f(x) &= f(x) - f(x-h) & (2)\\ \delta_h &= E^{\frac{h}{2}} - E^{-\frac{h}{2}} : & \delta_h f(x) &= f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}) & (3) \end{aligned}$$

Remarque 3.3.2 *Comme ces opérateurs sont tous définis en terme de puissances de E, ils commutent avec toute puissance de E et donc entre eux, c'est-à-dire $\Delta_h\nabla_h f = \nabla_h\Delta_h f$ etc.*

Remarque 3.3.3 *Si f est dérivable en x, on a par définition $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Delta_h f(x)$, et la même relation est valable pour ∇ (changer h en $-h$) et δ (qu'on peut réécrire comme $\frac{1}{2}(\Delta+\nabla)$). Par recurrence (et parce que $\Delta_h\frac{1}{h} = \frac{1}{h}\Delta_h$) on a donc aussi*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^k}\Delta_h^k f(x) = f^{(k)}(x)\ \ \textit{si } f\ k\textit{–fois dérivable en } x\ ,$$

et pareillement pour ∇ et δ.

Proposition 3.3.4 *Pour $x_i = x_0 + h\,i$ et $y_i = f(x_i)$, on a*

$$f[x_n, ..., x_{n+k}] = \frac{1}{k!\,h^k} \Delta_h^k f(x_n)...$$

Démonstration: En observant que $E^h f(x_i) = f(x_{i+1})$, on a

$$\Delta_h f[x_1, ..., x_k] = f[x_2, ..., x_{k+1}] - f[x_1, ..., x_k] = (x_{k+1} - x_1) \cdot f[x_1, ..., x_{k+1}]$$

donc

$$f[x_1, ..., x_{k+1}] = \frac{1}{k\,h} \Delta_h f[x_1, ..., x_k] = \frac{1}{k!\,h^k} \Delta_h^k f[x_1]$$

par récurrence immédiate. En appliquant l'opérateur déplacement $E^{h(n-1)}$, x_1 devient x_n, d'où la proposition. □

Remarque 3.3.5 *On peut établir tout un formulaire pour le calcul avec les opérateurs de déplacement et de différences finies. Comme ils commutent entre eux, on peut utiliser des identités telles que la formule de binome de Newton, etc. On a par exemple (écrivant E pour E^h)*

$$E^n = (I + \Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k \ , \quad \Delta^n = (E - I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} E^k \ , \ ...$$

En particulier on retiendra la formule

$$\Delta^2 = E^2 - 2\,E - I \ : \quad \Delta^2 f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2\,f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

qui représente l'analogue "discret" de la 2e dérivée.

3.4 Estimation de l'erreur

Théorème 3.4.1 *Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, et $E = \{x_i; i \in [\![1,n]\!]\}$ avec $a \le x_1 < x_2 < ... < x_n \le b$. Alors*

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in J : f(x) - P_E(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \cdot \pi_E(x) \ ,$$

avec $J =]\min(x, x_1), \max(x, x_n)[\subset]a, b[$ et $\pi_E(x) = \prod_{t \in E}(x - t) = (x - x_1) \cdot \cdot \cdot (x - x_n)$.

Démonstration: [esquisse] On pose, pour x donné, $K_x = \frac{1}{\pi_E(x)}(f(x) - P_E(x))$. On considère alors la fonction $w(t) = f(t) - P(t) - K_x \pi_E(t)$ qui s'annulle en $x_1, x_2, ..., x_n$ et x. Par application répétée du théorème de Rolle on montre alors qu'il existe $\xi \in J$ tel que $w^{(n)}(\xi) = 0$. Or, $P_E^{(n)} = 0$ et $\pi_E^{(n)}(\xi) = n!$, donc $K_x = f^{(n)}(\xi)/n!$. □

Ce théorème permet donc de mesurer l'erreur que l'on fait en aprochant f par P_E. En particulier, cette erreur est donc inférieure à

$$\frac{1}{n!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n)} \right| \sup_{[a,b]} |\pi_E|$$

dont le dernier facteur est une constante qui ne dépend pas de f.

Proposition 3.4.2 *Dans le cas de points équidistants $x_i = x_0 + i\,h$ avec $x_1 = a$ et $x_n = b$, on peut établir la majoration*

$$\sup_{[a,b]} |\pi_E| < \frac{1}{2}\, h^n\, (n-1)!$$

Démonstration: En effet, considérons $h^{-n}\pi(x) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{x}{h} - \frac{a}{h} - (i-1)) = \prod_{k=0}^{n-1}(\xi - k)$ avec $\xi = \frac{x-a}{h} \in [0, n-1]$. Cette dernière expression, notons-la $\psi(\xi)$, prend sa valeur maximale pour $\xi \in]0,1[$. En effet, si $x \in [1, \frac{n}{2}]$, alors $\psi(\xi-1)/\psi(\xi) = (\xi - n)/\xi \leq -1$, donc en passant de $\xi \in [1, \frac{n}{2}]$ à $\xi - 1$, $|\psi|$ croît par le facteur $(n-\xi)/\xi \geq 1$. (Bien sûr tout est symétrique par rapport au millieu $\frac{a+b}{2}$, donc on a le même résultat pour $\xi \to \xi + 1 > \frac{n}{2}$.) Enfin, si $\frac{1}{2} < \xi < 1$, faire $\xi \to 1 - \xi$ échange les 2 premiers facteurs de $|\psi|$ mais aggrandit tous les autres. Le maximum de $|\psi|$ est donc atteint pour $\xi \leq \frac{1}{2}$. Ceci et $|\xi - k| < k$ donne $|\psi| < \frac{1}{2}\,(n-1)!$, d'où le résultat. □

3.5 Phénomène de Runge, abscisses de Tchebycheff

Un inconvénient du polynôme d'interpolation de Lagrange est qu'il présente de fortes oscillations au bord du domaine d'interpolation, sans parler du fait qu'en dehors de $[x_1, x_n]$, il tend très rapidement vers $\pm\infty$, d'autant plus que n et donc le degré de P_E est élevé. Ce problème est connu sous le nom de phénomène de Runge. On peut donc chercher la "meilleure" distribution des x_i qui minimise $\sup_{[a,b]} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|$ et donc ces oscillations. On trouve, sans démonstration dans le cadre de ce cours, que ce minimum est obtenu pour les "abscisses de Tchebycheff"

$$x_i = a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \cos\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right) \quad , \quad i = 1, ..., n \ .$$

(En effet, pour $[a,b] = [-1,1]$, les x_i sont donnés par les $\cos(...)$ ci-dessus, le reste de la formule est une transformation affine de $[-1,1]$ vers $[a,b]$.)

Pour ce choix, on a même

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[a,b]} |f - P_E| = 0 \ ,$$

c-à-d. quand le nombre n de points augmente, l'approximation devient vraiment meilleure dans le sens de $\|\cdot\|_\infty = \sup_{[a,b]} |\cdot|$, ce qui n'est en général pas le cas pour des x_i équidistants.

3.6 Autres méthodes d'interpolation

Polynômes d'interpolation de Hermite. On peut aussi trouver un polynôme P_H tel que

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \ : \ P_H(x_i) = f(x_i) \ \text{ et } \ P_H'(x_i) = f'(x_i) \ .$$

Le polynôme de degré minimal qui vérifie ceci est le **polynôme de Hermite**, il est donné par

$$P_H(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)] + f'(x_i) \cdot (x - x_i)\right] L_i^2(x) \ .$$

et il est donc de degré $\leq 2n - 1$.

Approximation uniforme, moindres carrés. Plutôt qu'exiger que le polynôme d'interpolation passe par les valeurs de f en certains points, on peut aussi chercher P tel que l'écart quadratique

$$\int_a^b (f(x) - P(x))^2 \, \mathrm{d}x \ \text{ soit minimal.}$$

Plus généralement, si f est élément d'un certain espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, on peut chercher P dans un sous-espace $F =$ vect $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ tel que

$$\|f - P\| := \sqrt{(f - P, f - P)} \ \text{ soit minimal.}$$

Cette équation, developpée dans la base de F, donne alors $P = \sum_i \varphi_i \sum_j (A^{-1})_{ij} \, (f, \varphi_j)$, avec $A = [(\varphi_i, \varphi_j)]$.

Pour $E \subset R[a,b]$ (fonctions Riemann-integrables), on utilisera souvent $(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \rho(x)\, \mathrm{d}x$ avec une certaine fonction de poids $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, et $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ou similaire ; il est alors intéressant de connaître une base de F telle que $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$: ce sont les **polynômes orthogonaux** par rapport au poids ρ (polynômes de Legendre, Laguerre,...).