UNIVERSITÉ ANTILLES–GUYANE
UFR SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
DÉPT SCIENTIFIQUE INTERFACULTAIRE

Licence de Maths
Module LMB3
1^{er} semestre 2002–2003

T.P. Calcul Scientifique, série 4 : équations différentielles.

Exercice 1. (Résolution d'un problème de Cauchy à l'aide de Maple)

On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'(t) = e^{y(t)} & \forall t \in [0,1] \\ y(0) = -1\ . \end{cases}$$

(a) Quelle est la solution à (P) ?

(b) (Re)trouver cette solution en utilisant la fonction *dsolve(...)* de Maple. (Syntaxe : *dsolve(ED),* ou *dsolve({ED,CI},y(t)),* où *ED* est l'équation différentielle et *CI* la condition initiale. (Comparer le résultat des deux commandes.) — Pour écrire $y'(t)$ dans *ED,* utiliser *diff(y(t),t)* ou *D(y)(t).*)

(c) Est-ce que (P) admet une solution si on remplace -1 par $+1$?

(d) Quel résultat obtient-on pour les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) = e^{y(t)} \sin y(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = e^{t\,y(t)}\ ?$$

Exercice 2. (Méthode d'Euler)

Le dernier exemple ci-dessus montre qu'on ne trouve pas toujours de solution explicite, même dans des cas apparamment très simples : d'où l'intérêt des solutions numériques (approchées).

La méthode la plus simple de résolution numérique d'une équation différentielle ordinaire, de premier ordre, et *explicite,* c-à-d. de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t))\ ,$$

est celle d'Euler (également dite de Cauchy), qui consiste à choisir $t_k = a + k \cdot h$ ($k = 0, ..., N,\ h = \frac{1}{N}(b-a)$) et de calculer successivement $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$.

(a) Programmer une fonction *Euler(f,y0,a,b,N)* qui donne comme résultat la liste $[y_0, y_1, ..., y_N]$ définie ci-dessus, avec $y_0 = y0$.

(b) Tester la fonction pour le problème (P), dont on connait la solution exacte : pour différentes valeurs de N, comparer la valeur de y_N à la valeur théorique $y(t_N)$ ($t_N = b = 1$). (On peut aussi afficher la courbe théorique $y(t)$ et la courbe définie par la liste des points $[[t_k, y_k],\ k = 0..N]$.
On peut aussi faire *map(cp, [E(1), E(10), E(100), E(1000)], Y(1)),* avec *E := N–>Euler((t,y)–>exp(y),–1,0,1,N)[-1] ;* et Y la solution exacte.[1])

Exercice 3. (Méthode de Runge-Kutta)

(a) Programmer une procédure *runkut(f,y0,a,b,N),* mettant en œuvre la formule classique de Runge–Kutta d'ordre 4 (voir verso).

(b) Appliquer *runkut()* au problème (P), et étudier la convergence (par exemple l'erreur en $t_N = 1$) pour $N \in \{\,1, 10, 100\,\}$.

(c) Comparer aux résultats de la méthode d'Euler.

[1]Que fait : *Y := unapply(rhs(dsolve({D(y)(t)=exp(y(t)),y(0)=–1},y(t))),t)* ?

Appendice D : Résolution numérique d'équations différentielles.

D.1 Problème de Cauchy

Thm. : Soit E un $\mathbb{R}$–e.v. normé, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in C([a,b] \times E; E)$ telle que

$$\exists L > 0 : \ \forall t \in [a,b], \ \forall y,z \in E : \ \|f(t,y) - f(t,z)\| \leq L\,\|y - z\| \ . \qquad (L)$$

Alors le **problème de Cauchy** : $\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & \forall t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \in E & \text{donné} \end{cases} \qquad (P)$

admet une solution unique, unique point fixe de l'opérateur

$$\varphi \ : \ C([a,b];E) \to C([a,b];E) \ ; \quad y \mapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_a^t f(s,y(s))\,\mathrm{d}s \right) \ ,$$

égal à la limite de la suite convergente d'approximations successives $y_{n+1} = \varphi(y_n)$.
La **condition de Lipschitz** (L) est vérifiée si f est dérivable en y et telle que

$$\sup_{[a,b]\times\mathbb{R}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L \ .$$

La **résolution numérique** d'un problème de Cauchy (dans $E = \mathbb{R}$ pour simplifier) consiste à calculer des valeurs $(y_k)_{k=1...N}$, approximations à $y(t_k)$ en des points $t_k \in [a,b]$ choisis (y étant la solution exacte).
Un schéma est dit **d'ordre** m ssi $\sup_k |y_k - y(t_k)| = O(\sup_k |t_{k+1} - t_k|^m)$, c-à-d. l'erreur tend vers 0 comme h^m, si h est le pas de la subdivision $\{\, t_k \,\}$ de $[a,b]$.

D.2 Méthodes à un pas

On ne considère ici que des subdivisions équidistantes, $t_k = t_0 + k \cdot h$, et des méthodes à un pas, c-à-d. de la forme

$$y_{k+1} = y_k + h\,\phi(t_k, y_k, h) \ , \quad k \in \{\, 0, ..., N-1 \,\}$$

L'exemple le plus simple d'une telle méthode est celle d'**Euler**, obtenue pour $\phi(t,y,h) = f(t,y)$. Elle converge toujours vers la solution de (P) quand $N \to \infty$.

D.3 Méthodes de Runge–Kutta

Ces méthodes utilisent des points intermédiaires $t_{k,1}, ..., t_{k,q} \in [t_k, t_{k+1}]$, pour passer de y_k à y_{k+1}, en calculant au fur et à mesure des approximations $y_{k,i}$ de $y(t_{k,i})$.
Ces formules sont caractérisées par des paramètres $\{\, c_i, b_i, a_{i,j} \,\}$, indépendants de f et de $[a,b]$, déterminées pour que la formule d'intégration soit d'ordre maximal.
La méthode « classique » est celle pour $q = 4$, d'ordre 4, qui correspond aux calculs

$$\begin{aligned}
&p_{k,1} = f(t_k, y_k) \ ; \quad y_{k,2} = y_k + \tfrac{h}{2}\,p_{k,1} \ ; \quad t_{k,2} = t_k + \tfrac{h}{2} \quad (h = t_{k+1} - t_k) \ ; \\
&p_{k,2} = f(t_{k,2}, y_{k,2}) \ ; \quad y_{k,3} = y_k + \tfrac{h}{2}\,p_{k,2} \ ; \quad p_{k,3} = f(t_{k,2}, y_{k,3}) \ ; \quad y_{k,4} = y_k + h p_{k,3} \ ; \\
&p_{k,4} = f(t_{k+1}, y_{k,4}) \ ; \quad y_{k+1} = y_k + h\,\left(\tfrac{1}{6}\,p_{k,1} + \tfrac{2}{6}\,p_{k,2} + \tfrac{2}{6}\,p_{k,3} + \tfrac{1}{6}\,p_{k,4}\right) \ .
\end{aligned}$$