

### T.P. Calcul Scientifique, série 3 : interpolation.

#### Exercice 1. (Polynôme de Lagrange)

- (a) Ecrire une fonction *lagrange* := *proc*(*x*,*f*) ... *end*; qui calcule le polynôme de Lagrange qui interpole la fonction *f* en les abscisses  $x = [x_1, \dots, x_n]$ .

[Utiliser *nops*(*x*) pour connaître *n*, et *X* (pas *x*!) comme indéterminée; la somme des produits peut être calculée avec deux boucles utilisant des variables locales *i*, *j*, *S*, *P*, ou à l'aide des fonctions *add*(*)*, *mul*(*)*.]

**N.B.** : On pourra remarquer (à raison...) qu'il est inutile de se fatiguer à programmer des fonctions qui existent sans doute déjà dans Maple. Si vous êtes de cet avis, vous êtes fortement encouragés à consulter la documentation en-ligne et à écrire le programme demandé sans programmer de boucle, en utilisant la bibliothèque de Maple.

- (b) Tester la fonction sur deux ou trois exemples simples.  
(On peut définir *f* comme une fonction numérique habituelle, ou simplement en définissant des valeurs  $f(x_i) := y_i$ .)

#### Exercice 2. (Phénomène de Runge, abscisses de Tchebychev)

- (a) Pour mettre en évidence le phénomène de Runge, on considère la fonction  $f = x \mapsto \frac{1}{2}(x + |x|)$  interpolée en  $x_i = i/n$ ,  $i = -n, \dots, n$ .

Utiliser la commande *plot*( { *f*(*X*), *P* }, *X*=-1..1) pour tracer *f* et le polynôme d'interpolation *P* sur un même graphique, pour différentes valeurs de *n*.

- (b) Comparer au résultat que l'on obtient pour les abscisses de Tchebychev.

#### Exercice 3. (Différences divisées, forme de Newton)

- (a) Ecrire une procédure *DD*(*x*,*f*) qui calcule, pour  $x = [x_1, \dots, x_n]$ , récursivement la différence divisée  $f[x_1, \dots, x_n]$ .

(Utiliser *[x[i] \$ i=a..b]* pour créer la liste des  $x_i$  souhaités.)

- (b) Tester la procédure sur quelques exemples. Pour  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , que vaut  $f[x_1, \dots, x_{n+1}]$ ,  $f[x_1, \dots, x_{n+2}]$  ?

(Faire le calcul par exemple pour  $x_i = i$ , puis changer les valeurs.)

- (c) Ecrire une procédure *lagrange\_newton*(*x*,*f*) qui utilise *DD*(*)* pour calculer le polynôme de Lagrange sous la forme de Newton.

#### Exercice 4. (Autres polynômes d'interpolation.)

S'il reste du temps, vous pouvez programmer d'autres types d'interpolation (splines, Hermite...), ou expérimenter avec ceux déjà implémentés dans Maple.

## Appendice C : Interpolation polynômiale

### C.1 Polynôme de Lagrange

**Thm. :** Le polynôme de degré minimal qui passe par un ensemble de points donné  $E = \{ (x_i, y_i); i = 1 \dots n \}$  (avec  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$ ), est le **polynôme de Lagrange**,

$$P_E(x) = \sum_{i=1}^n y_i L_i(x) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . (N.B. : Les  $L_i$  vérifient  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .)

### C.2 Différences divisées et forme de Newton

Le polynôme de Lagrange peut aussi s'écrire comme somme de  $n$  termes dont les  $k$  premiers constituent le polynôme de degré  $k-1$  passant par les  $k$  premiers points, c'est la **forme de Newton** du polynôme de Lagrange :

$$P_E = \sum_{k=1}^n c_k \pi_k(x) \quad \text{avec} \quad \pi_k = \prod_{j=1}^{k-1} (x - x_j) \quad (\pi_1 = 1)$$

où les coefficients sont les **différences divisées**  $c_k = [x_1, \dots, x_k]$  définis récursivement par

$$[x_i] := y_i, \quad [x_i, \dots, x_k] := \frac{[x_i, \dots, x_{k-1}] - [x_{i+1}, \dots, x_k]}{x_i - x_k} \quad (k > i).$$

**Notation :** Si  $y_i = f(x_i)$ , on écrit souvent  $f[x_i, \dots, x_k]$  au lieu de  $[x_i, \dots, x_k]$ .

**Remarque :** En écrivant  $P_E(x) = c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3 + \dots))$  (*schéma de Horner*), l'évaluation de  $P_E(x)$  nécessite seulement  $n-1$  multiplications.

### C.3 Phénomène de Runge, abscisses de Tchebychev

Si on interpole une fonction non-polynômiale en un grand nombre d'abscisses équidistantes, le polynôme de Lagrange présente de fortes oscillations au bord du domaine d'interpolation. Ce problème est connu sous le nom de *phénomène de Runge*. Pour minimiser  $\sup_{[a,b]} |f - P_E| = 0$ , on choisit les **abscisses de Tchebychev**

$$x_i = a + \frac{b-a}{2} \left( 1 + \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

On a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[a,b]} |f - P_E| = 0$ , ce qui n'est en général pas le cas pour des  $x_i$  équidistants.

### C.4 Autres méthodes d'interpolation

Pour éviter le phénomène de Runge, on utilise aussi les « splines » ; ce sont des fonctions polynômiales par morceaux (par exemple de degré 3 sur chaque  $[x_i, x_{i+1}]$ ) vérifiant des conditions de raccord (p.ex. tels que la première dérivée coïncide au racollement des sous-intervalles, de façon à obtenir une fonction  $C^2([a, b])$ ).

D'autres méthodes (interpolation de Hermite, moindres carrés, approximation uniforme...) sont décrites dans le cours distribué.