Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

Licence de Maths
Module LMB3
1^{er} semestre 2002–2003

T.P. Calcul Scientifique, série 1: chiffres précis, accélération de convergece

Exercice 1. (nombre de chiffres précis)

(a) Définir, à l'aide de l'opérateur « `->` » (cf. aide en-ligne), une fonction *cp(x,r)*, qui calcule le nombre de chiffres précis de x comme approximation de r.
Attention : on voudrait que la fonction donne toujours un résultat numérique en virgule flottante, plutôt qu'une formule exacte.
[Indication : utiliser la fonction `evalf` ; voir aussi l'aide en-ligne pour la fonction `log`.]

(b) Tester la fonction pour les approximations $1.234 \approx 1.23456$, $\frac{22}{7} \approx \pi$
(et d'autres, si vous voulez ; par exemple $\sqrt{10} \approx \pi$, $2.7 + \frac{1828}{99990} \approx e, ...$).

(c) Afficher l'approximation en virgule flottante de $\frac{22}{7}$ et de π.
Quelle remarque pourrait-on faire en comparant les deux résultats du (1b), et la valeur des (x, r) en virgule flottante ? Quelle est votre explication ?

Exercice 2. (Δ^2 d'Aitken)

(a) En utilisant l'opérateur « $ », calculer la liste *x:=[...]* des premiers 20 termes de la suite $x_n = 1 + 0.9^n + 0.1^n$.

(b) Définir une procédure *Aitken(x)* qui calcule la suite (A_n) à partir des x_n.
(N.B. : *nops(x)* donne le nombre d'éléments de x. — Attention : A_n étant défini en terme de trois x_k, la suite A a deux éléments de moins.)

(c) Appliquer la procédure à la suite x et commenter le résultat.

Exercice 3. (intégration numérique et extrapolation de Richardson)

(a) i. Écrire une procédure *approx(f,a,b,N)* qui calcule

$$\sum_{i=1}^{N} f(a + i\,h) \cdot h \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{N} \ .$$

ii. Calculer *approx(tan,0,1,N)* pour $N = 10, 100, 1000$.

iii. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 \tan(x)\,\mathrm{d}x$, et le nombre de chiffres précis des approximations précédentes.

iv. En déduire l'ordre de l'estimateur $T_h = approx(f, a, b, N)$.

(b) i. Écrire une procédure *richard(f,a,b,N)* qui calcule l'extrapolé de Richardson de *approx(f,a,b,N)*.

ii. Tester la procédure pour $N = 10, 30, 100$. (Nombre de chiffres précis ?)

iii. Comparer aux résultats du (3(a)iii). Conclusions ?

A Appendice : cours de « calcul scientifique »

A.1 Erreur et nombre de chiffres précis

Déf. : On considère une approximation x d'une valeur réelle r.
On appelle $e = x - r$ **erreur absolue** et $\varepsilon = \frac{x-r}{r}$ l'**erreur relative** (pour $r \neq 0$).
Le **nombre de chiffres précis (en base 10)** est

$$N(x, r) = -\log_{10} |\varepsilon| = -\log_{10} \left| \frac{x - r}{r} \right| .$$

A.2 Vitesse de convergence

Soit (x_n) convergente vers $r \in \mathbb{R}$, et $e_n = x_n - r$, $\varepsilon_n = e_n/r$.
Déf. : Avec les notations précédentes, on définit :
– Si $K_1 := \lim \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim \frac{x_{n+1}-r}{x_n-r}$ existe et $0 < |K_1| < 1$,
alors on dit que (x_n) converge **linéairement** vers r ;
– Si $K_1 = 0$ et $K_2 := \lim \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \in]-1, 1[\setminus \{0\}$,
alors (x_n) converge **quadratiquement** vers r ;
– Si $K_1 = K_2 = 0$ et $K_3 := \lim \frac{e_{n+1}}{(e_n)^3} \in]-1, 1[\setminus \{0\}$,
alors (x_n) converge **cubiquement** vers r ;
la généralisation à une convergence d'ordre n est évidente.

A.3 Précision ajoutée par une iteration

Prop. : Soit $x = (x_n)$ une suite convergente vers r ;
– si (x_n) converge linéairement, on a $N(x_{n+1}, r) \simeq N(x_n, r) - \log_{10} |K_1(x)|$
– si (x_n) converge quadratiquemt, on a $N(x_{n+1}, r) \simeq 2\, N(x_n, r) - \log_{10} |r\, K_2(x)|$
– si (x_n) converge cubiquement, on a $N(x_{n+1}, r) \simeq 3\, N(x_n, r) - \log_{10} |r^2 K_3(x)|$

A.4 Accélération de convergence : Δ^2 d'Aitken

Déf. : On définit le Δ^2 d'Aitken comme la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}+2}$ définie par :

$$A_n := \frac{x_n x_{n-2} - (x_{n-1})^2}{x_n - 2\, x_{n-1} + x_{n-2}} = x_n - \frac{(\delta_n)^2}{\delta_n - \delta_{n-1}} \quad \text{avec} \quad \delta_n := x_n - x_{n-1}.$$

Prop. : Si (x_n) converge linéairement, on a $\lim \frac{A_n - r}{x_n - r} = 0$.

A.5 Extrapolation de Richardson

On cherche à trouver $T_0 := \lim_{h \to 0} T_h$.

Déf. : T_h est un estimateur d'ordre h^n de T_0 ssi $\lim_{h \to 0} \dfrac{T_h - T_0}{h^n}$ existe dans $\mathbb{R}^*$.
Déf. : On appelle extrapolé de Richardson de T_h l'estimateur

$$S_h = T_{h/2} + \frac{T_{h/2} - T_h}{2^N - 1} .$$

Prop. : Si T_h est estimateur d'ordre h^n, alors S_h est estimateur d'ordre h^m, $m > n$. Le correctif $R_h = \frac{T_{h/2} - T_h}{2^N - 1}$ est approximativement égal à l'erreur $T_0 - T_{h/2}$.