IV Formes linéaires, dualité

Sommaire

IV.1 Dual d'un espace vectoriel

IV.1.a Rappels sur les e.v.

Définition IV.1.a.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle* ***espace vectoriel*** *sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$–e.v.) un groupe abélien $(E,+)$ muni d'une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K}\times E \to E$ vérifiant*

$$\begin{aligned} \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall x,y\in E: \quad \lambda\cdot(x+y) &= \lambda\cdot x+\lambda\cdot y\ , \\ (\lambda+\mu)\cdot x &= \lambda\cdot x+\mu\cdot x\ , \\ (\lambda\,\mu)\cdot x &= \lambda\cdot(\mu\cdot x)\ , \quad \textit{et} \quad 1\cdot x = x\ . \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés ***scalaires****, ceux de E les* ***vecteurs****, l'élément neutre de $(E,+)$ est le* ***vecteur nul****, noté o_E ou o s'il n'y a pas d'ambiguïté. Au lieu de $\lambda\cdot x$, on écrira souvent $\lambda\,x$.*

Un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) d'un $\mathbb{K}$–e.v. E est une partie $F\subset E$ qui est espace vectoriel pour les lois de E. En particulier cette partie doit être sous-groupe de $(E,+)$ et stable par multiplication scalaire, et cela suffit :

Proposition IV.1.a.2 *Une partie F d'un $\mathbb{K}$–e.v. E est sous-espace vectoriel de E ssi les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $o_E\in F$ *ou :* *(i′)* $: F\neq\emptyset$

et : *(ii)* $\forall x,y\in F: x+y\in F$ *et* $\forall\lambda\in\mathbb{K}:\lambda\,x\in F$

(ou (ii') $\forall x,y\in F,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}:\ \lambda\,x+\mu\,y\in F$ *) .*

On rappelle également que **l'intersection d'une famille de s.e.v.** est encore s.e.v., on a donc la notion de **s.e.v. engendré par une partie** F, noté $\operatorname{vect} F$, qui est l'intersection de tous les s.e.v. (donc « le plus petit s.e.v. ») contenant F. Il est égal à l'ensemble de toutes les **combinaisons linéaires** (sommes finies $\sum'\lambda_i x_i$) de vecteurs de F.

La **somme d'une famille** (F_i) **de s.e.v.**, ensemble des sommes finies de vecteurs des s.e.v., est également un s.e.v., égal au s.e.v. engendré par leur réunion : $\sum F_i = \left\{\sum' x_i\ ;\ x_i\in F_i\right\} = \operatorname{vect}\bigcup F_i$. Elle est **directe** et notée $\bigoplus F_i$, ssi les s.e.v. sont linéairement indépendants, $\forall i: F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j=\{\,o\,\}$.

Enfin, une famille $(v_i)_i$ est libre ou non liée, ssi l'application attachée à cette famille, $(\lambda_i)\mapsto\sum\lambda_i\,v_i$, est injective, c'est-à-dire si $\sum'\lambda_i\cdot v_i = o$ implique que $\forall i:\lambda_i=0$. (C'est le cas si aucun v_i n'est nul et la famille des droites vectorielles engendrées, $\mathbb{K}\cdot v_i$, est linéairement indépendante.)

IV.1.b Rappels sur les applications linéaires

Définition IV.1.b.1 *Les **applications ($\mathbb{K}-$) linéaires** sont les morphismes de $\mathbb{K}$–esapces vectoriels : pour deux $\mathbb{K}$–e.v. E et F, on pose*

$$\mathcal{L}(E,F) = \left\{ f \in F^E \mid \forall x, y \in E,\ \forall \mu \in \mathbb{K} : f(x+\mu\, y) = f(x) + \mu\, f(y) \right\}$$

(et on obtient pour $\mu = 1$ la compatibilité avec l'addition, et pour $y = x$ et $\mu = \lambda - 1$ celle concernant la multiplication scalaire, $f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$.
*On a en particulier les **endomorphismes** $\mathrm{End}(E) = \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$, les **isomorphismes** $\mathrm{Iso}(E,F) = \{ f \in \mathcal{L}(E,F) \mid f \text{ bijectif}\}$, le « groupe linéaire » des **automorphismes**, $\mathrm{Aut}(E) = \mathrm{Iso}(E,E) = \mathcal{L}(E) \cap S(E) = \mathrm{GL}(E)$, et les **formes linéaires** sur E qui sont les éléments de $E^* := L(E,\mathbb{K})$, appellé le **dual** (ou espace dual) de E.*

(Remarque : ici, $\mathbb{K}$ est vu (de manière évidente) comme $\mathbb{K}$–e.v.)

Exemple IV.1.b.2 *On a vu en analyse que l'application $\int_a^b : f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$–e.v. des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.*

Concernant la structure de l'ensemble des applications linéaires, on a la

Proposition IV.1.b.3 *(i) Si F est un $\mathbb{K}$–e.v. et E un ensemble non-vide quelconque, F^E est un $\mathbb{K}$–e.v. pour les lois $+$ est $\cdot$ définis par*

$$f + g = (x \mapsto f(x) + g(x)) \ ; \quad \lambda \cdot f = (x \mapsto \lambda \cdot f(x)) \ .$$

(ii) Si E, F sont des $\mathbb{K}$–e.v., alors $L(E,F)$ est un s.e.v. de F^E.

(iii) En particulier, $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$–e.v.

Remarque : *Le (ii) n'est pas une conséquence triviale du (i) : il faut vérifier qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires en est encore une.*

Rappelons encore que l'**image (réciproque) de tout s.e.v.** de E (resp. F) par $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est s.e.v. de F (resp. de E). En particulier, **le noyau** $\ker f = f^{-1}(\{ o_F \}) = \{ x \in E \mid f(x) = o \}$ est s.e.v. de E, et on a le

Théorème IV.1.b.4 *Une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective si et seulement si* $\ker f = \{ o_E \}$.

IV.1.c Base duale (en dimension finie)

Rappelons qu'une **base** d'un e.v. E est une famille de vecteurs telle que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille. Une application *linéaire* est donc déterminée de façon unique en fixant l'image de chaque vecteur de base de l'espace de départ. Enfin, toutes les bases d'un e.v. ont le même cardinal, qui est appelé la **dimension** de E.

Proposition IV.1.c.1 *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base d'un espace vectoriel E. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe une unique forme linéaire e_j^* telle que*[4]

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \ e_j^*(e_i) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} . \qquad (*)$$

*La forme e_j^* est la j^e **forme coordonnée** par rapport à la base $\mathcal{B}$, c-à-d. $e_j^*(x_1\, e_1 + \cdots + x_n\, e_n) = x_j$.*

Démonstration. Une forme linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est entièrement déterminée par l'image de chaque vecteur de la base considérée de E. Ainsi, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé, les n équations (*) (avec $i = 1$, ..., $i = n$) définissent de façon unique la forme linéaire e_j^*, et on a $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} & e_j^*(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_j e_j + \cdots + x_n e_n) \\ & = x_1 e_j^*(e_1) + x_2 e_j^*(e_2) + \cdots + x_j e_j^*(e_j) + \cdots + x_n e_j^*(e_n) \\ & = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_j \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 0 = x_j \end{aligned}$$

□

Théorème IV.1.c.2 *Pour toute base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E, il existe une unique base $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ de E^*, appelée **base duale** de $\mathcal{B}$ (ou : base duale à $\mathcal{B}$, de E^*), telle que $\forall i, j \in \{\, 1, ..., n\,\} : e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$.*

Démonstration. L'existence et unicité du système $\mathcal{B}^*$ vérifiant ces équations est assurée par la proposition précédente. Montrons que c'est libre et générateur, donc base. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$h = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, e_j^* = o_{E^*} \ .$$

[4]On rappelle que δ_{ij} est appelé **symbole de Kronecker**.

Alors

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \ : \quad 0 = h(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, e_j^*(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \delta_{ij} = \lambda_i.$$

Ainsi $\mathcal{B}^*$ est libre. Montrons que $E^* = \operatorname{vect} \mathcal{B}^*$. Soit $f \in E^*$. Posons

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \, e_j^* \in \operatorname{vect} \mathcal{B}^* \ , \text{ avec } \ a_j = f(e_j) \ .$$

On a alors pour tout $i \in \{\,1, ..., n\,\}$,

$$\begin{aligned} g(e_i) &= \sum_{j=1}^{n} f(e_j) \, e_j^*(e_i) = \sum_{j=1}^{n} f(e_j) \, \delta_{ij} \\ &= f(e_1) \, \delta_{i1} + \cdots + f(e_i) \, \delta_{ii} + \cdots + f(e_n) \, \delta_{in} \\ &= f(e_1) \cdot 0 + \cdots + f(e_i) \cdot 1 + \cdots + f(e_n) \cdot 0 = f(e_i). \end{aligned}$$

Une application linéaire étant entièrement déterminée par les images des vecteurs de la base, on a donc $f = g \in \operatorname{vect} \mathcal{B}^*$. Ainsi la famille $\mathcal{B}^*$ est aussi génératrice et donc base. $\square$

Corollaire IV.1.c.3 *Si E est de dimension n, E^* est de dimension n.*

Corollaire IV.1.c.4 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de E^*. Pour les coordonnées de $x \in E$ (resp. $f \in E^*$) par rapport à la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}^*$), on a alors :*

$$\underset{\mathcal{E}}{\operatorname{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \underset{\mathcal{E}^*}{\operatorname{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix} \ .$$

Démonstration. La première relation a déjà été donnée dans la Proposition précédente, la seconde dans la démonstration du Théorème ci-dessus. $\square$

Remarque IV.1.c.5 *En introduisant le **crochet de dualité***

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \to \mathbb{K} \ ; \quad \forall f \in E^*, \ \forall x \in E : \ \langle f, x \rangle := f(x) \ ,$$

les familles des coordonnées peuvent aussi s'écrire $(\,\langle e_i^*, x \rangle\,)_i$ resp. $(\,\langle f, e_i \rangle\,)_i$.

Remarque IV.1.c.6 *L'application qui à une base de E associe sa base duale est une bijection de l'ensemble des bases de E sur l'ensemble des bases de E^*.*

IV.1.d Détermination pratique de la base duale

Posons le problème : soit $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E (par exemple la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$) et $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale de E^*. On suppose donnée, par les coordonnées de ses vecteurs dans $\mathcal{E}$, une base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de E, et on veut déterminer sa base duale $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$, c'est-à-dire les coordonnées des b_i^* dans $\mathcal{E}^*$.

Proposition IV.1.d.1 *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ deux bases de E, et $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{B}^*$ les bases duales respectives. Alors,*

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}^*} \mathcal{B}^* = {}^t(\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B})^{-1} \ ,$$

c'est-à-dire la ***matrice de passage*** *de la base duale $\mathcal{E}^*$* ***à la base duale $\mathcal{B}^*$, est la transposée de l'inverse*** *de la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Pour chercher le lien entre la matrice $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$ et la matrice $B = (b_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}^*}(\mathcal{B})$, écrivons

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, e_k \qquad \text{et} \qquad b_i^* = \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell i}\, e_\ell^* \ .$$

Par définition de la base duale, il faut avoir, pour tout $i, j \in \{\,1, ..., n\,\}$:

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = b_i^*(b_j) &= \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell i}\, e_\ell^*(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, e_k) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{\ell i}\, a_{kj}\, e_\ell^*(e_k) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{\ell i}\, a_{kj}\, \delta_{\ell k} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{kj} \ .\end{aligned}$$

Le membre de gauche de l'égalité est le coefficient de rang (i, j) de la matrice identité I, alors que le membre de droite est le coefficient de rang (i, j) du produit matriciel de la transposée de B, $({}^tB)_{ik} = (b_{ki})$, avec la matrice A. Ainsi $I = {}^tB\,A$, soit $B = {}^tA^{-1}$. □

Remarque IV.1.d.2 *Les b_i^* ont donc pour composantes celles des vecteurs* ***lignes*** *de A^{-1}. Dans la pratique, on inverse la matrice A par la méthode de Gauss, $(A|I) \rightsquigarrow (I|A^{-1})$, et on peut lire directement dans les lignes du « membre de droite » les coordonnées de la base duale, même avant de normaliser et ranger les lignes dans l'ordre (voir exemple suivant).*

Exemple IV.1.d.3 *Soit $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. On considère la base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, avec*

$$b_1 = (-3, -2, 7)\ ,\quad b_2 = (3, -1, -5)\ ,\quad b_3 = (1, -3, 0)\ .$$

La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

On inverse A par exemple par la méthode de Gauss ; on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 8 \\ 21 & 7 & 11 \\ -17 & -6 & -9 \end{pmatrix} . = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}^*} \mathcal{B}^*\ ,$$

d'après ce qui précède. La base $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ duale de $\mathcal{B}$, est donc donnée par

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}^*} b_1^* = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\ ,\quad \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}^*} b_2^* = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}\ ,\quad \operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}^*} b_3^* = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}\ ,$$

soit :

$$b_1^* = 15\, e_1^* + 5\, e_2^* + 8\, e_3^*\ ,\ b_2^* = 21\, e_1^* + 7\, e_2^* + 11\, e_3^*\ ,\ b_3^* = -17\, e_1^* - 6\, e_2^* - 9\, e_3^*\ .$$

Comme indiqué dans la remarque, on aurait pu lire les composantes des b_i^* directement dans les lignes de A^{-1}. Mieux, si au cours de la méthode du pivot, on aboutit par exemple à $(A|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & -34 & -12 & -18 \\ -2 & 0 & 0 & -30 & -10 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 21 & 7 & 11 \end{array}\right)$, *cela suffit déjà pour lire les coordonnées de b_1^* (2^e ligne divisée par (-2)), b_2^* (3^e ligne) et b_3^* (1^e ligne divisée par 2).*

Remarque IV.1.d.4 *Essayons de ne pas confondre des vecteurs avec leur matrice dans une base donnée, même si c'est la base canonique ; d'autant plus qu'il s'agit ici de formes linéaires, donc d'*applications *— à moins de mentionner « en identifiant $(\mathbb{R}^n)^*$ avec $\mathbb{R}^n$ », voir plus loin.*

Remarque IV.1.d.5 *La base duale à une base $\mathcal{B}^*$ de E^* est strictement parlant une base $\mathcal{B}^{**}$ de E^{**}. Or, d'une part E^{**} s'identifie avec E, d'autre part, puisque $B = {}^tA^{-1} \iff A = {}^tB^{-1}$, cela revient au même que de chercher la base $\mathcal{B}$ de E* dont *$\mathcal{B}^*$ est la base duale.*

IV.1.e Bidual et morphisme canonique de E dans E^{**}.

Définition IV.1.e.1 *Le dual de E^* est noté E^{**} et appelé **bidual** de E. Pour tout $x \in E$, on définit un élément $\tilde{x}$ de E^{**} en posant :*

$$\forall f \in E^*, \;\; \tilde{x}(f) = \langle f, x \rangle = f(x).$$

L'application

$$\sim : \quad E \to E^{**} \;, \quad x \mapsto \tilde{x} \;,$$

*est appelée **isomorphisme canonique** de E dans E^{**}.*

Théorème IV.1.e.2 *L'isomorphisme canonique de E dans E^{**} est en effet linéaire et bijectif.*

Démonstration. Linéarité : $\forall x, y \in E, \;\; \mu \in \mathbb{K}, \;\; f \in E^* : \widetilde{x + \mu\, y}(f) = f(x + \mu\, y) = f(x) + \mu f(y) = \tilde{x}(f) + \mu\, \tilde{y}(f) = (\tilde{x} + \mu\, \tilde{y})(f)$.
Injectivité : $\tilde{x} = o_{E^{**}} \iff \forall f \in E^* : f(x) = 0 \iff x = o_E$. En effet, si $x \neq o$ on peut considérer une base $(e_1, ..., e_n)$ avec $e_1 = x$, et on a $e_1^* \in E^*$, $e_1^*(x) = 1 \neq 0$. — Avec l'égalité des dimensions, $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$, on a aussi la bijectivité. $\square$

Cet isomorphisme permet donc d'identifier E et E^{**}.

Proposition IV.1.e.3 *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}^*$ sa base duale. L'image de $\mathcal{B}$ par l'isomorphisme canonique de E sur E^{**} est la base duale de $\mathcal{B}^*$.*

Démonstration. On a $\tilde{e}_j(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, ainsi $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}^*$. $\square$

Remarque IV.1.e.4 *Tous les résultats et définitions de ce sous-chapitre restent valables en dimension infinie, en écrivant $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ au lieu de $\{ e_1, ..., e_n \}$.*

IV.1.f Transposition

Théorème IV.1.f.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Il existe alors une unique application ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ telle que*

$$\forall x \in E, \; \forall f \in F^*, \;\; \langle f, u(x) \rangle = \left\langle {}^t u(f), x \right\rangle \tag{t}$$

Cette relation s'appelle l'identité fondamentale de la transposition.

Démonstration. La relation (t), qui s'écrit aussi ${}^t u(f)(x) = f(u(x))$, définit de manière unique l'application ${}^t u : F^* \to E^*,\ f \mapsto f \circ u$, ($f \circ u \in E^*$ car $u \in L(E, F)$ et $f \in L(F, \mathbb{K})$), et cette application ${}^t u$ est linéaire : ${}^t u(f + \mu\, g) = (f + \mu\, g) \circ u = f \circ u + \mu\, g \circ u$ (sans même utiliser la linéarité de u ou de f). $\square$

Définition IV.1.f.2 *L'application $t : \mathcal{L}(E; F) \to \mathcal{L}(F^*; E^*)$; $u \mapsto {}^t u$ est appelée la* ***transposition****, ${}^t u$ est appellée la* ***transposée*** *de u.*

Proposition IV.1.f.3 *(i) Si $u \in \mathcal{L}(E; F)$ et $v \in \mathcal{L}(F; G)$, alors*

$$^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v \ .$$

(ii) La transposée de l'application identité de E est celle de E^* :

$$^t(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_{E^*} \ .$$

(iii) La transposition est linéaire : $\forall u, v \in \mathcal{L}(E; F),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$^t(\lambda u + \mu v) = \lambda\, {}^t u + \mu\, {}^t v \ .$$

(iv) Si u est un automorphisme de E, alors ${}^t u$ est un automorphisme de E^* et

$$({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1}) \ .$$

(v) En identifiant E et E^{**}, F et F^{**} on a :

$$^t({}^t u) = u \ .$$

Démonstration. *(i)* immédiat, avec ${}^t u(f) = f \circ u$. *(ii)* $(\forall f)\ {}^t \mathrm{id}_E(f) = f \circ \mathrm{id}_E = f = \mathrm{id}_{E^*}(f)$. *(iii)* exercice facile (même démarche ; utiliser la linéarité des $f \in E^*$). *(iv)* : $u \in \operatorname{Aut} E \Rightarrow {}^t u \circ {}^t(u^{-1}) \overset{(iii)}{=} {}^t(u^{-1} \circ u) = {}^t \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*} = {}^t(u \circ u^{-1}) = {}^t(u^{-1}) \circ {}^t u$, donc ${}^t u$ bijective, d'inverse ${}^t(u^{-1})$. *(v)* L'identification des biduaux signifie que ${}^t({}^t u) \circ \sim\ =\ \sim \circ u$. $\square$

Théorème IV.1.f.4 *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{E} = (e_i)_i$ et $\mathcal{B} = (b_j)_j$ des bases de E et F, et $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{B}^*$ leurs bases duales respectives. Alors la matrice de la transposée de u par rapport aux bases duales $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{E}^*$ est la transposée de la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*}({}^t u) = {}^t(\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{B}} u)$.*

Démonstration. On a $(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*} {}^t u)_{ij} = e_i^{**}({}^t u(b_j^*)) = \tilde{e}_i(b_j^* \circ u) = b_j^*(u(e_i)) = (\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{B}} u)_{ji}$. $\square$

Corollaire IV.1.f.5 *Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ on a alors* $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} {}^t u$.
(Il suffit de considérer les matrices des applications et utiliser $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t A$.*)*

Exemple IV.1.f.6 *$\mathbb{Q}^3$ et $\mathbb{Q}^2$ étant munis de bases canoniques respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, soit u l'application de $\mathbb{Q}^3$ dans $\mathbb{Q}^2$ définie par :*

$$u(x) = (-x_1 + 2x_2 + 5x_3, 6x_1 - 3x_2 + x_3)$$

La matrice de u par rapport à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

et celle de ${}^t u$ par rapport aux bases duales $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{B}^*$ est : ${}^t A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice IV.1.f.7 *Expliciter concrètement ${}^t u$, et calculer ${}^t u(\varepsilon_1^*)$ et ${}^t u(\varepsilon_2^*)$.*

IV.2 Formes bilinéaires et orthogonalité

IV.2.a Formes bilinéaires

Définition IV.2.a.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Une application φ de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$ est dite **forme bilinéaire** si pour tout couple (a,b) de $E \times F$, les applications partielles*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a,\cdot) : F & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \varphi(a,y) \end{array} \qquad et \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(\cdot,b) : E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \varphi(x,b) \end{array}$$

sont des formes linéaires, autrement dit : $\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{ll} \varphi(x+x',y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y) & \qquad \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y) \\ \varphi(x,y+y') = \varphi(x,y) + \varphi(x,y') & \qquad \varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x,y) \ . \end{array}$$

Remarque IV.2.a.2 *Par abus de langage, on appelle forme bilinéaire sur E toute forme bilinéaire sur $E \times E$.*

Exemple IV.2.a.3 *L'application*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \quad (x,y) \mapsto x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_3 \ ,$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$.
En effet, les applications partielles

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a,\cdot) : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & a_1y_1 - 2a_1y_2 + a_2y_3 \end{array} \qquad et \quad \begin{array}{rcl} \varphi(\cdot,b) : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_1b_1 - 2x_1b_2 + x_2b_3 \end{array}$$

sont des formes linéaires.

Plus généralement, les formes bilinéaires sur $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n$ *sont de la forme* $\varphi(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ *et donc canoniquement isomorphes à* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *; si* $(e_1, ..., e_m)$ *et* $(f_1, ..., f_n)$ *sont bases de* E *et* F*, ceci se généralise de manière évidente aux formes bilinéaires sur* $E \times F$*.*

IV.2.b La forme bilinéaire canonique ($F = E^*$)

Définition IV.2.b.1 *L'application*

$$\begin{aligned} \phi : E \times E^* &\to \mathbb{K} \\ (x,f) &\mapsto \langle f, x\rangle = f(x). \end{aligned}$$

est appelée forme bilinéaire canonique sur $E \times E^*$*.*

On vérifie aisément que ϕ est une forme bilinéaire sur $E \times E^*$: à l'ordre des arguments près, ce n'est autre que le crochet de dualité.

IV.2.c Orthogonalité

La donnée d'une forme bilinéaire φ sur le produit $E \times F$ de deux $\mathbb{K}$-ev donne lieu à la notion d'orthogonalité ; en effet on appelle deux éléments $x \in E$ et $y \in F$ orthogonaux ssi $\varphi(x,y) = 0$.
Dans cette section nous étudions l'orthogonalité relative à la forme bilinéaire canonique sur $E \times E^*$.

Remarque IV.2.c.1 *L'ensemble des* $x \in E$ *orthogonaux à* $f \in E^*$ *n'est autre que le noyau de* f*. Réciproquement, les* $f \in E^*$ *orthogonaux à* $x \in E$ *forment le noyau de* $\tilde{x} \in E^{**}$*. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est appelé un* ***hyperplan****.*

Définition IV.2.c.2 *Pour* $A \subset E$*, on appelle*

$$A^\perp = \{\, f \in E^* \mid \forall x \in A : \langle f, x\rangle = 0 \,\} = \{\, f \in E^* \mid f(A) = \{\,0\,\}\,\}$$

l'orthogonal de A*. De même, l'orthogonal de* $B \subset E^*$ *est noté*

$$B^\top = \{\, x \in E \mid \forall f \in B : \langle f, x\rangle = 0 \,\} = \{\, x \in E \mid \tilde{x}(B) = \{\,0\,\}\,\} \ .$$

Notation IV.2.c.3 *L'orthogonal relatif à une forme bilinéaire* φ *(autre que la forme bilinéaire canonique) peut se noter* A^φ *resp.* ${}^\varphi B$*. Ces structures seront étudiées en détail au* 4^e *semestre.*

Remarque IV.2.c.4 (importante) *Il est clair que* $A_1 \subset A \Rightarrow A_1^\perp \supset A^\perp$.

Proposition IV.2.c.5 *Pour tout* $A \subset E$ *et* $B \subset E^*$*, les ensembles* $A^\perp$ *et* $B^\top$ *sont des s.e.v. de* E *et* E^**.*

Démonstration. D'après la première remarque IV.2.c.1, c'est l'intersection de noyaux de morphismes, donc s.e.v. :

$$A^\perp = \bigcap_{x\in A} \ker \tilde{x} \ ; \quad B^\top = \bigcap_{f\in B} \ker f \ .$$

□

Exemple IV.2.c.6 *(i) On a :*

$$E^\perp = \{\, 0_{E^*} \,\} \ , \quad \{\, 0_E \,\}^\perp = E^* \ .$$
$$(E^*)^\top = \{\, 0_E \,\} \ , \quad \{\, 0_{E^*} \,\}^\top = E$$

(ii) Dans $\mathbb{R}^3$*, l'isomorphisme canonique* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ *permet d'identifier* $\mathbb{R}^3$ *avec son dual. Ainsi, on parle du plan orthogonal à un vecteur, par exemple* $v = (-1, 1, 3)$*, pour désigner* $\{\, v^* \,\}^\perp$*, l'orthogonal de la forme linéaire* $v^* : (x, y, z) \mapsto -x+y+3z$*, donc l'ensemble des points* (x, y, z) *vérifiant l'équation* $-x + y + 3z = 0$*. Réciproquement, on dira que l'orthogonal au plan* P *d'équation* $2x-y+3z = 0$ *est la droite vectorielle engendrée par* $(2, -1, 3)$*, alors que strictement parlant,* $\{\, P \,\}^\perp \subset E^*$ *sont les formes linéaires proportionnelles à* $f : (x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z$*. Ceci est déjà un exemple d'orthogonalité en dimension finie, étudiée dans le paragraphe suivant.*

Exercice IV.2.c.7 *Pour des s.e.v.* F, G *de* E*, on a*

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \ ; \ (F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp \ .$$

Solution. $F, G \subset F + G \Rightarrow F^\perp, G^\perp \supset (F + G)^\perp \Rightarrow F^\perp \cap G^\perp \supset (F + G)^\perp$, et $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ car $\langle x, f + g\rangle = \langle x, f\rangle + \langle x, g\rangle$.
$F \cap G \subset F, G \Rightarrow (F \cap G)^\perp \supset F^\perp, G^\perp$ &c. □

Remarque IV.2.c.8 *En dim.finie il y a égalité dans la dernière relation.*

Théorème IV.2.c.9 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*–e.v. et* $u \in \mathcal{L}(E; F)$*, alors*

(i) $\ker({}^t u) = (\operatorname{im} u)^\perp$

(ii) $\operatorname{im}({}^t u) = (\ker u)^\perp$

Démonstration.

(i) : $$\begin{aligned}(\operatorname{im} u)^\perp &= \{\, f \in F^* \mid \forall x \in E : \langle f, u(x)\rangle = 0 \,\} \\ &= \left\{\, f \mid \forall x : \left\langle {}^t u(f), x \right\rangle = 0 \,\right\} = \left\{\, f \mid {}^t u(f) = o \,\right\} = \ker({}^t u)\end{aligned}$$

(ii) : $$\begin{aligned}\operatorname{im}({}^t u) &= \left\{\, {}^t u(f) \ ; \ f \in F^* \,\right\} = \{\, f \circ u \ ; \ f \in F^* \,\} \\ &= \{\, \varphi \in E^* \mid \exists f \in F^* : \varphi = f \circ u \,\} \\ &\stackrel{*}{=} \{\, \varphi \in E^* \mid \forall x \in E : u(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \,\} \\ &= \{\, \varphi \in E^* \mid \forall x \in \ker u : \langle \varphi, x \rangle = 0 \,\} = (\ker u)^\perp\end{aligned}$$

Pour $\stackrel{*}{=}$, l'inclusion $\subset$ est évidente. Réciproquement, si $\ker u \subset \ker \varphi$, on a $\varphi = f \circ u$ pour[5] $f = j \circ \tilde{\varphi} \circ s \circ \tilde{u}^{-1} \circ p$, d'après le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} F & \stackrel{u}{\longleftarrow} & E & = & E & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & \mathbb{K} \\ p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow j \\ \operatorname{im} u & \stackrel{\tilde{u}}{\longleftarrow} & E/\ker u & \stackrel{s}{\longrightarrow} & E/\ker \varphi & \stackrel{\tilde{\varphi}}{\longrightarrow} & \operatorname{im} \varphi \end{array}$$

où :

- p est un projecteur de F sur $\operatorname{im} u \subset F$ (parallèlement à un supplémentaire quelconque de $\operatorname{im} u$ dans F, dont on admet l'existence), vérifiant donc $\forall x \in E : p(u(x)) = u(x)$.
- $\tilde{\varphi}$, $\tilde{u}$ sont les isomorphismes de $E/\ker g \to \operatorname{im} g$ ($g \in \{\, \varphi, u \,\}$) ; et
- $s : E/\ker u \to E/\ker \varphi$, $c\ell_{\ker u}(x) \mapsto c\ell_{\ker \varphi}(x)$ est une surjection bien définie, car on a $x' \in x + \ker u \Rightarrow x' \in x + \ker \varphi$ par hypothèse.
- Enfin, l'injection canonique $j : \operatorname{im} \varphi \to \mathbb{K}$, n'est utile que si $\varphi = o$, car sinon $\operatorname{im} \varphi = \mathbb{K}$ (de dimension 1).

Ainsi, pour tout $x \in E$: $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x + \ker \varphi) = \tilde{\varphi}(s(x + \ker u)) = \tilde{\varphi}(s(\tilde{u}^{-1}(u(x)))) = \tilde{\varphi}(s(\tilde{u}^{-1}(p(u(x)))))$, d'où l'égalité. □

IV.2.d Orthogonalité en dimension finie

Nous avons déjà vu qu'en dimension finie, on a certains résultats plus forts ou plus concrets que dans le cas général. D'autre part, on peut faire des démonstrations plus « constructives », en s'appuyant en particulier sur la possibilité de choisir une base finie.

Exercice IV.2.d.1 (preuve constructive du Thm. IV.2.c.9(ii))
Etant donné E de dimension finie et $u \in L(E, F)$, $\varphi \in E^*$ tels que

[5] voir l'exercice suivant pour une construction plus explicite de f en dimension finie.

$\ker u \subset \ker \varphi$, *construire explicitement un* $f \in F^*$ *tel que* $\varphi = f \circ u$. *(Indication : compléter une base de* $\ker u$ *en une base de* E *et compléter son image par* u *en une base de* F.*)*

Solution : *Soit* $(e_1, ..., e_n)$ *base de* E *telle que* $(e_{r+1}, ..., e_n)$ *soit base de* $\ker u$ *(*$r = \operatorname{rg} u$*). On sait alors que* $(u_1 = u(e_1), ..., u_r = u(e_r))$ *est une base de* $\operatorname{im} u$ *qu'on complète en une base* $(u_1, ..., u_m)$ *de* F. *Il suffit de définir* $f \in F^*$ *par* $f(u_1) = \varphi(e_1), ..., f(u_r) = \varphi(e_r)$ *et* $f(u_{r+1}) = ... = f(u_m) = 0$, *pour avoir* $f \circ u(\sum^n x_i e_i) = f(\sum^r x_i u_i) = \sum^r x_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum^n x_i e_i)$, *car* $\varphi(e_i) = 0$ *pour les* $e_i \in \ker u \iff i > r$.

Théorème IV.2.d.2 *Si* E *est de dimension finie, alors pour tout sous-espace* F *de* E *et pour tout sous-espace* G *de* E^*, *on a*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \dim F + \dim F^\perp = \dim E \ , && (ii) \quad F = (F^\perp)^\top \ , \\ &(iii) \quad \dim G + \dim G^\top = \dim E^* \ , && (iv) \quad G = (G^\top)^\perp \ . \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $(e_1, ..., e_m)$ une base de F ($m = \dim F$), complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E, et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale de E^*. Montrons que $(e_{m+1}^*, ..., e_n^*)$ est une base de $F^\perp$. Tout $f \in E^*$ s'écrit de façon unique $f = f_1 e_1^* + ... + f_n e_n^*$. Si $f_1 = ... = f_m = 0$, alors $f \in F^\perp$ (car $f(x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m) = 0$) ; réciproquement, si $f(e_i) = f_i \neq 0$ pour $i \leq m$, $f \notin F^\perp$. Donc, $F^\perp = \operatorname{vect}(e_{m+1}^*, ..., e_n^*)$ et c'est une sous-famille libre, donc une base. Ainsi, $\dim F^\perp = n - m$, d'où le (i). Le même raisonnement appliqué à cette base de $F^\perp$ montre que $(e_1, ..., e_m)$ est une base de $(F^\perp)^\top$, d'où le (ii). Enfin, (iii)–(iv) est équivalent à (i)–(ii) en prenant E^* comme l'espace vectoriel de départ (et avec $E^{**} = E$). $\square$

Exemple IV.2.d.3 *Plans et droites mutuellement orthogonaux dans* $\mathbb{R}^3$ *(cf. exemple précédent), en identifiant* $\mathbb{R}^3$ *avec* $(\mathbb{R}^3)^*$, *voir TD6, exo 2(b).*

Exemple IV.2.d.4 *Contre-exemple au (ii) en dim. infinie : dans* $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *(suites réelles) on a le s.e.v.* $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ *(suites finis), t.q.* $(F^\perp)^\top = \{ o_{E^*} \}^\top = E \neq F$.

Corollaire IV.2.d.5 *(aux deux Théorèmes précédents) Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*–e.v. et* $u \in \mathcal{L}(E; F)$. *Si* E *ou* F *est de dimension finie, alors* $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}({}^t u)$.

Démonstration. $\dim E = n : \operatorname{rg} u \overset{\mathrm{T(rg)}}{=} n - \dim \ker u \overset{(i)}{=} \dim (\ker u)^\perp \overset{IV.2.c.9(i)}{=} \dim \operatorname{im} {}^t u$.

$\dim F = m$: $\operatorname{rg} {}^t u \overset{\mathrm{T(rg)}}{=} m - \dim\ker {}^t u \overset{IV.2.c.9(i)}{=} m - \dim(\operatorname{im} u)^{\perp} \overset{(i)}{=} \dim\operatorname{im} u = \operatorname{rg} u$ □

Lemme IV.2.d.6 *Pour toute partie $A \subset E$, on a $A^{\perp} = (\operatorname{vect} A)^{\perp}$. Avec ce qui précède, on a donc* $\operatorname{vect} A = (A^{\perp})^{\top}$ *(en dimension finie).*

Démonstration. Si f est orthogonale aux éléments de A, elle l'est aussi à leurs combinaisons linéaires, donc à vect A. L'inclusion réciproque est triviale, car $A \subset \operatorname{vect} A$ (Rem. IV.2.c.4). □

Corollaire IV.2.d.7 *Soient $H_1, \ldots, H_p$ des hyperplans de E, d'équations respectives*

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_p(x) = 0.$$

Alors

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) = \dim E - \dim\langle f_1, \ldots, f_p\rangle.$$

Démonstration. Il suffit d'observer que $F = H_1 \cap \cdots \cap H_p = \{\, f_1, ..., f_p \,\}^{\top} = \langle f_1, ..., f_n\rangle^{\top}$ d'après le Lemme, et d'utiliser le (iii) du Théorème. □

IV.2.e Exercice corrigé : dual et orthogonal

Exercice IV.2.e.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.*

1. *Soient B et B_1 deux bases de E, et M la matrice de passage de la base B à la base B_1. On note B^* et B_1^* les bases duales des bases B et B_1. Quelle est la matrice de passage de la base B^* à la base B_1^* ?*
2. *On suppose $E = \mathbb{R}^3$ et on note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.*
   (a) *On considère les vecteurs*

   $$u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (1,1,0)\ .$$

   Montrer que $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^{3*}$. Donner les coordonées dans B^* des vecteurs de B_1^*, base duale de B_1.

   (b) *On considère les formes φ_1, φ_2 et φ_3 définies par*

   $$\begin{aligned}\varphi_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1 - x_2 + x_3\\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1 + x_2 - 2x_3\\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) &= -4\,x_1 + x_2 + x_3\end{aligned}$$

   Montrer que $D^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base duale de D^* dans B.

3. *On considère $E = \mathbb{R}^4$ et on note $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ sa base canonique.*
   (a) *Etant donné les vecteurs*
   $$u'_1 = (1,1,1,0),\ u'_2 = (1,0,1,0),\ u'_3 = (1,1,0,0),$$
   déterminer $\langle u'_1, u'_2, u'_3\rangle^{\perp}$.
   (b) *On considère les formes*
   $$\varphi'_1 = 2e'^*_1 + e'^*_2 + e'^*_3,\ \varphi'_2 = -e'^*_1 + 2e'^*_3.$$
   Déterminer $\langle \varphi'_1, \varphi'_2\rangle^{\top}$.

Solution.

1. Soit M la matrice de passage de la base B à la base B_1.
   La matrice de passage de la base B^* à la base B_1^* est la transposée de la matrice inverse de M.
2. (a) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrons que $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, en montrant que M est inversible, avec
   $$M = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (sachant qu'on aura besoin de M^{-1} — sinon il suffirait de calculer son rang). N.B. : Les coordonnées des vecteurs constituent les **colonnes** de M, mais on ne risque pas d'erreur car $M = {}^tM$ ici.

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) l_2 - l_1;\ l_3 - l_1$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) l_1 + l_3 + l_2$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi M est inversible, d'inverse

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

On en déduit que B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$ (car famille de 3 vecteurs de rang 3 (donc libre) dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc aussi génératrice).
Les **lignes** de M^{-1} sont les coordonnées des u_j^*, donc $B_1^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ avec

$$u_1^* = -e_1^* + e_2^* + e_3^* \ , \quad u_2^* = e_1^* - e_2^* \ , \quad u_3^* = e_1^* - e_3 \ .$$

(M^{-1} étant symétrique comme M, on ne risque pas d'erreur ici.)

(b) Montrer que $D^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathbb{R}^{3*}$.
On a

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e_1^* - e_2^* + e_3^* \\ \varphi_2 &= e_1^* + e_2^* - 2e_3^* \\ \varphi_3 &= -4e_1^* + e_2^* + e_3^* \end{aligned}$$

Montrons que $D^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathbb{R}^{3*}$ en montrant que P est inversible, avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) l_2 + l_1 ; l_3 - l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) l_3 + (3/2) l_2 ; l_1 - \tfrac{1}{2} l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right) l_1 + 5 l_3 ; l_2 + 6 l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right) .$$

D'où P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. $D^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est donc une base de $\mathbb{R}^{3*}$. Les coordonées des vecteurs de la base duale de D^* dans B sont les vecteurs lignes de P^{-1} :

$$\operatorname{Mat} \varphi_1^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} ; \quad \operatorname{Mat} \varphi_2^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \operatorname{Mat} \varphi_3^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

3. (a) Déterminons $\langle u_1', u_2', u_3' \rangle^{\perp}$:

$$\langle u_1', u_2', u_3' \rangle^{\perp} = \{ f \in \mathbb{R}^{4*} \mid f(u_1') = f(u_2') = f(u_3') = 0 \}$$

Posons $f = a_1 e_1'^* + a_2 e_2'^* + a_3 e_3'^* + a_4 e_4'^*$
Alors $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$ et on a à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{r} f(u_1') = a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ f(u_2') = a_1 + a_3 = 0 \\ f(u_3') = a_1 + a_2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 = -a_1 \\ a_2 = -a_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} -a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{array} \right.$$

D'où $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_4 x_4$, et

$$\langle u_1', u_2', u_3' \rangle^{\perp} = \langle e_4'^* \rangle$$

Remarque : On aurait pu montrer que $\dim \langle u'_1, u'_2, u'_3 \rangle = 3$, d'où

$$\dim \langle u'_1, u'_2, u'_3 \rangle^{\perp} = 4 - 3 = 1.$$

Et en remarquant que $e'^{*}_4 \in \langle u'_1, u'_2, u'_3 \rangle^{\perp}$, on avait tout de suite le résultat.

(b) Déterminons $\langle \varphi'_1, \varphi'_2 \rangle^{\mathsf{T}} = \{ \ x \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi'_1(x) = \varphi'_2(x) = 0 \ \}$.
On a $\varphi'_1(x) = 2x_1 + x_2 + x_3$, $\varphi'_2(x) = -x_1 + 2x_3$, d'où le système :

$$\begin{cases} \varphi'_1(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \varphi'_2(x) = -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -5x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_1, \varphi'_2 \rangle^{\mathsf{T}} &= \{ \ (2x_3, -5x_3, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \ \} \\ &= \langle (2, -5, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \\ &= \langle (2, -5, 1, 0), e_4 \rangle \, . \end{aligned}$$

$\square$