T.D. série 4 : ensembles, relations, lois de composition

Ensembles

Exercice 1. (a) En fonction de $x, y \in \mathbb{R}$, donner le cardinal de l'ensemble $\{x, y\}$.

(b) L'ensemble vide $\emptyset$ est défini par : $\forall x : x \notin \emptyset$. En déduire :
(i) $\emptyset \subset E$ pour tout E ; (ii) $A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$; (iii) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(c) Pour les parties $A =]-1, 2]$ et $B = [1, 3[$ de $\mathbb{R}$, déterminer :
(i) $B \setminus A$ et (ii) $B - A = \{b - a; a \in A, b \in B\}$.

Exercice 2. Faire un schéma avec deux ensembles non disjoints pour illustrer les lois de de Morgan, et la différence symétrique $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Relations

Exercice 3. Pour deux relations $\mathcal{R} : E \to F$, $\mathcal{S} : F \to G$, on définit la relation composée $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} : E \to G$ par $x\,(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\,z \iff \exists y \in F : x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{S}\,z$.

(a) Montrer que la composition est associative, c-à-d. :
$(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$, pour toute relation $\mathcal{T} \subset G \times H$.

(b) Une relation $\mathcal{R}$ est une fonction ssi $\forall x, y, y' : x\,\mathcal{R}\,y \wedge x\,\mathcal{R}\,y' \Rightarrow y = y'$. Montrer que la composée de deux fonctions est une fonction.

(c) Montrer que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est injective si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ le sont. L'injectivité de $\mathcal{R}$ est-elle nécessaire ? et celle de $\mathcal{S}$?

(d) Montrer que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est surjective si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ le sont. La surjectivité de $\mathcal{S}$ est-elle suffisante ? nécessaire ? et celle de $\mathcal{R}$?

(e) Sous quelle condition est-ce que la réciproque $\mathcal{R}^{-1}$ d'une relation $\mathcal{R}$ est-elle une fonction ? Sous quelle condition est-elle surjective ?

Relations d'ordre

Exercice 4. Soient $(E, \mathcal{R})$ et $(F, \mathcal{S})$ deux ensembles ordonnés. On appelle ordre lexicographique sur $E \times F$ la relation binaire définie sur $E \times F$ par

$$(x, y)\,\mathcal{T}(x', y') \iff \big((x\,\mathcal{R}\,x' \wedge x \neq x') \vee (x = x' \wedge y\,\mathcal{S}\,y')\big) .$$

Montrer que c'est une relation d'ordre. Généraliser à un ordre sur E^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Relations d'équivalence

Exercice 5. (a) Montrer que la relation : $x\,\mathcal{R}\,y \iff x - y$ est divisible par 5, est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

(b) Montrer que si $x\,\mathcal{R}\,x'$ et $y\,\mathcal{R}\,y'$, alors $(x+y)\,\mathcal{R}(x'+y')$ et $(x\,y)\,\mathcal{R}(x'\,y')$.

Exercice 6. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des relations d'équivalence sur des ensembles E et F. Sur $E \times F$, on définit une relation binaire $\mathcal{T}$ par :

$$(x, y)\,\mathcal{T}(x', y') \iff x\,\mathcal{R}\,x' \wedge y\,\mathcal{S}\,y' .$$

(a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

(b) Exhiber une bijection entre $(E \times F)/\mathcal{T}$ et $(E/\mathcal{R}) \times (F/\mathcal{S})$.

Exercice 7. Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, et $\mathcal{S}$ une relation binaire sur F. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E par

$$\forall x, y \in E : \; x \,\mathcal{R}\, y \iff f(x) \,\mathcal{S}\, f(y) \tag{$*$}$$

hérite des propriétés (réflexivité, transitivité, symétrie,...) de la relation $\mathcal{S}$.

Exercice 8. Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ des relations d'équivalence sur des ensembles E et F respectivement. Une application $f : E \to F$ est dite **compatible** avec les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ si, et seulement si, elle vérifie $\forall x, y \in E : x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow f(x) \,\mathcal{S}\, f(y)$.

(a) Soit f compatible avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe une unique application $g : E/\mathcal{R} \to F/\mathcal{S}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi', \\ E/\mathcal{R} & \xrightarrow{g} & F/\mathcal{S} \end{array}$$

c'est-à-dire telle que $\pi' \circ f = g \circ \pi$ (avec $\pi : x \mapsto c\ell(x)$).

(b) Réciproquement, supposons qu'il existe $g : E/\mathcal{R} \to F/\mathcal{S}$, telle que $\pi' \circ f = g \circ \pi$. Montrer que f est compatible avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

Lois de composition

Exercice 9. Etudier les suivantes lois de composition internes sur $\mathbb{R}$ (associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, éléments inversibles) :

(a) $a \,\Box\, b = \sqrt{a^2 + b^2}$,

(b) $a * b = a + b - ab$; calculer $a^n = a * \cdots * a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) $a \nabla b = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Exercice 10. Sur les parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E, l'union, l'intersection et la différence symétrique sont des l.c.i. Étudier les propriétés de ces lois.

Exercice 11. Etudier la loi définie sur $E = \mathbb{Q}^2$ par : $(a, b) \top (a', b') = (aa', ba' + b')$.

Exercice 12. On considère l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, muni de la loi $(x, y) \,\&\, (x', y') = (x\,x', y\,x' + f(x)\,y')$, Quelles conditions doit vérifier l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ pour que & soit commutative ? associative ? admette un élément neutre ? Quels sont dans ce dernier cas les éléments inversibles ?

Exercice 13. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $\mathbb{R}$ muni de la loi $x * y = a(x + y) + b\,x\,y + c$ soit un groupe.

Morphismes

Exercice 14. Soit f un morphisme d'un magma $(G, \cdot)$ dans un magma $(H, *)$. Montrer que si $(G, \cdot)$ est un groupe abélien, alors $(f(G), *)$ l'est aussi. (On parle de « *transport de structure* » par un morphisme surjectif.)
Attention : A-t-on toujours $f(e_G) = e_H$? (Considérer $o : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\; x \mapsto 0$.)

Exercice 15. Montrer que l'application réciproque d'un isomorphisme (c'est-à-dire d'un morphisme bijectif) en est un aussi.