Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 2e année
Algèbre 3
1^{er} semestre 2005–2006

T.D. série 1 : dual, transposition et orthogonalité

Espace dual, base duale

Exercice 1. (a) Pour $a \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\psi_a : x \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ est forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, puis montrer que $(\mathbb{R}^n)^* = \{ \psi_a \ ; \ a \in \mathbb{R}^n \}$.

(b) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque. Construire un isomorphisme (canonique) de $\mathbb{K}^n$ sur son dual, $(\mathbb{K}^n)^*$.

(c) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$–e.v. E ; construire une bijection de $\mathbb{K}^n$ sur E^* et montrer que c'est un isomorphisme.

Exercice 2. (a) Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, -1), (2, 1, 1, 1), (0, 2, -1, 2), (1, 2, 0, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathcal{B}^*$, base de $(\mathbb{R}^4)^*$ duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 3. On considère les applications $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\varphi_1(x) = x_1 + x_3 \ , \quad \varphi_2(x) = 2\,x_1 - 3\,x_2 \ , \quad \varphi_3(x) = x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \ .$$

(a) Montrer que $D^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

(b) Déterminer la base duale de D^* dans $\mathbb{R}^3$.

Transposée

Exercice 4. Démontrer les égalités données en cours pour la transposée, à savoir

$${}^t\,\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*}, \ {}^t(\lambda u + \mu v) = \lambda\,{}^tu + \mu\,{}^tv, \ {}^t(u \circ v) = {}^tv \circ {}^tu, \ ({}^tu)^{-1} = {}^t(u^{-1}),$$

et enfin, en dimension finie, ${}^t({}^tu) = u$, en identifiant E^{**} et E.

Exercice 5. On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$–e.v. des polynômes réels de degré ≤ 2.

(a) Montrer que les trois formes linéaires $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in E^*$, définies par

$$\phi_1(P) = P(0) \ ; \quad \phi_2(P) = P(1) \ ; \quad \phi_3(P) = P'(0) \ ,$$

forment une base de E^*, et déterminer sa base duale.

(b) Soit $u \in L(E)$ définie par

$$u(P) = P'(X + 1) + P'(X - 1) - P'(X) \ ,$$

et f la forme linéaire sur E définie par : $f(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer la forme linéaire ${}^tu(f)$.
Calculer les composantes de ${}^tu(f)$ dans la base (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3).

Formes bilinéaires

Exercice 6. (a) Soit E l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace ordinaire ; montrer que le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{V}'$ définit une forme bilinéaire sur E.

(b) Généraliser au produit scalaire dans $\mathbb{K}^n$.

(c) Généraliser à $(x, y) \mapsto {}^t x \, A \, y$; $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(d) Etant donné une base $(e_1, ..., e_n)$ d'un $\mathbb{K}$–e.v. E ; construire une bijection de $\mathbb{K}^{n^2}$ sur l'ensemble des formes bilinéaires de E.

Exercice 7. La **trace** d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie comme la somme des éléments sur la diagonale ; on la note $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Montrer que $\mathrm{tr} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. En déduire que $\phi : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, avec $\psi(A) : B \mapsto \mathrm{tr}(AB)$, est un isomorphisme. (Considérer la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.)

(c) Montrer que toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \varphi(AB) = \varphi(BA)$, est un multiple de tr. (Calculer $\varphi(E_{i\,1} E_{1j}.)$)

Orthogonal

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et son dual E^*.

(a) Déterminer l'orthogonal $V^\perp$ du sous-espace vectoriel V de E engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0, 1)$; $v_2 = (1, 0, 1, 0)$; $v_3 = (1, 1, 0, 0)$.

(b) Trouver l'orthogonal $W^\top$ du sous-espace vectoriel $W \subset E^*$ engendré par $\varphi_1 = 2e_1^* + e_2^* - e_4^*$, $\varphi_2 = -e_1^* + 2e_2^*$.

Exercice 9. Soient E_1 et E_2 (resp. F_1 et F_2) deux sous-espaces d'un espace vectoriel E (resp. E^*), supposé de dimension finie. Démontrer

(a) $(E_1 + E_2)^\perp = {E_1}^\perp \cap {E_2}^\perp$ et $(E_1 \cap E_2)^\perp = {E_1}^\perp + {E_2}^\perp$.

(b) $(F_1 + F_2)^\top = {F_1}^\top \cap {F_2}^\top$ et $(F_1 \cap F_2)^\top = {F_1}^\top + {F_2}^\top$.