UNIVERSITÉ des ANTILLES et de la GUYANE;
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles (D.S.I.)
DEUG 1 année : CORRIGE DE L'EXAMEN DE MATHEMATIQUES DE MAI 2006

Exercice [5,5 points]

(1) On calcule tout d'abord la partie entière de $F(X)$ en faisant la **division euclidienne** du numérateur $-X^3 + 2X^2 + X$ par le dénominateur $X^3 + X^2 - X - 1$, on trouve -1.
Puis on factorise le dénominateur en polynômes irréductibles en remarquant que 1 est racine évidente donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$X^3 + X^2 - X - 1 = (X-1)(aX^2 + bX + c) \iff X^3 + X^2 - X - 1 = aX^3 + X^2(b-a) + (c-b)X - c$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -1 \\ -c = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = b - 1 = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

donc on obtient

$$X^3 + X^2 - X - 1 = (X-1)(X^2 + 2X + 1) = (X-1)(X+1)^2$$

C'est bien une décomposition en facteurs irréductibles puisque $(X-1)$ et $(X+1)$ sont de degré 1.
Donc la décomposition en éléments simples de $F(X)$ s'écrit:

$$F(X) = -1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b_1}{X+1} + \frac{b_2}{(X+1)^2}$$

On calcule les coefficients par les méthodes habituelles et on trouve

$$a = 1/2,\ b_1 = 5/2,\ b_2 = -1$$

donc on obtient la décomposition en éléments simples de $F(X)$:

$$F(X) = -1 + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{5}{2(X+1)} - \frac{1}{(X+1)^2}$$

(2) On effectue le changement de variable $u = \cos x$. Tout d'abord on a $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$, puis $du = -\sin x dx$ donc on obtient (en se souvenant de l'identité $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\cos x + \sin^2 x}{\sin x + \tan x} dx \\
&= \int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{2u + 1 - u^2}{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}} \frac{du}{-\sin x} \\
&= -\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{2u + 1 - u^2}{\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{u}} du \\
&= -\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{2u + 1 - u^2}{1 - u^2 + \frac{1-u^2}{u}} du \\
&= -\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{2u + 1 - u^2}{\frac{u - u^3 + 1 - u^2}{u}} du \\
&= -\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{-u^3 + 2u^2 + u}{u - u^3 + 1 - u^2} du \\
&= \int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{-u^3 + 2u^2 + u}{u^3 + u^2 - u - 1} du \\
&= \int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} F(u) du \\
&= \int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \left(-1 + \frac{1}{2(u-1)} + \frac{5}{2(u+1)} - \frac{1}{(u+1)^2} \right) du \\
&= \left[-u + \frac{1}{2} \ln|u-1| + \frac{5}{2} \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} \right]_{\sqrt{3}/2}^{1/2}
\end{aligned}$$

Problème. I. [7 points]

(1) Tout d'abord on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2+x^4>0 \implies \sqrt{1+x^2+x^4}>0$$

donc $D_g=\mathbb{R}$, et en fait g est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient d'une fonction constante donc continue par la fonction $(x\mapsto\sqrt{1+x^2+x^4})$ qui est continue (composée de fonctions continues) et jamais nulle.
Donc comme g est continue sur $\mathbb{R}$ elle est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, donc f est bien définie pour tout x dans $\mathbb{R}$.
Parité de g:

$$g(-x)=\frac{1}{\sqrt{(-x)^4+(-x)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=g(x)$$

Parité de f:

$$f(-x)=\int_{-x}^{-2x} g(t)dt$$

pour se ramener à une intégration sur le segment $[x,2x]$ on fait le changement de variable $T=-t$ et on obtient

$$\begin{aligned} f(-x)=\int_{-x}^{-2x} g(t)dt &= \int_{x}^{2x} g(-T)(-dT) \\ &= -\int_{x}^{2x} g(T)dT \text{ car } g(-T)=g(T) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

donc f est impaire. De même

$$h(-x)=f(-x)-(-x)=-f(x)+x=-(f(x)-x)=-h(x)$$

donc h est impaire.

(2) On peut écrire

$$f(x)=\int_x^{2x} g(t)dt=\int_0^{2x} g(t)dt+\int_x^0 g(t)dt=G(2x)-G(x)$$

donc $f'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2g(2x)-g(x)$. Or $g(x)$ est indéfiniment dérivable car la fonction $x\mapsto x^4+x^2+1$ est un polynôme donc est indéfiniment dérivable et de plus la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on rappelle que pour tout réel x, on a $x^4+x^2+1>0$).
Donc h est indéfiniment dérivable car somme de deux fonctions indéfiniment dérivable.

(3) On calcule

$$\begin{aligned} h(x)=f(x)-x &= \int_x^{2x} g(t)dt-\int_x^{2x} dt \\ &= \int_x^{2x}(g(t)-1)dt \end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned} \forall t\in\mathbb{R}, t^4+t^2\geq 0 \implies t^4+t^2+1\geq 1 &\implies \sqrt{t^4+t^2+1}\geq 1 \\ &\implies \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\leq 1 \\ &\implies \forall t\in\mathbb{R}, g(t)-1\leq 0 \end{aligned}$$

donc comme pour tout $x\geq 0$ on a $x\leq 2x$ alors pour tout $x\geq 0$ on a $h(x)\leq 0$. Or h est impaire donc pour $x<0$ on a

$$h(x)=-h(-x)\geq 0 \text{ car } -x>0 \text{ donc } h(-x)\leq 0$$

Donc h est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$.

(4) On a

$$\begin{cases} f(1/x)=\int_{1/x}^{2/x} g(t)dt \\ f(x/2)=\int_{x/2}^{x} g(t)dt \end{cases}$$

Pour pouvoir comparer ces deux intégrales on doit tout mettre sur un même intervalle d'intégration on va donc faire le changement de variable $T=1/t$ dans la première intégrale (en remarquant que $0\notin[1/x,2/x]$), et on a

$$
\begin{aligned}
f(1/x) &= \int_{1/x}^{2/x} g(t)dt \\
&= \int_{x}^{x/2} g(1/T)\frac{-dT}{T^2} \text{ car } T = 1/t \iff t = 1/T \implies dt = -dT/T^2 \\
&= -\int_{x}^{x/2} \frac{1}{\sqrt{(1/T)^4 + (1/T)^2 + 1}} \frac{dT}{T^2} \\
&= \int_{x/2}^{x} \frac{1}{T^2\sqrt{\frac{1}{T^4} + \frac{1}{T^2} + 1}} dT \\
&= \int_{x/2}^{x} \frac{1}{\sqrt{T^4\left(\frac{1}{T^4} + \frac{1}{T^2} + 1\right)}} dT \\
&= \int_{x/2}^{x} \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 + t^4}} dT \\
&= f(x/2)
\end{aligned}
$$

(5) On calcule la dérivée de f

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 2g(2x) - g(x) &= \frac{2}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} \\
&= \frac{2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}
\end{aligned}
$$

donc $f'(x)$ est du signe de $2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}$. Trouvons le signe de cette expression en utilisant l'expression conjuguée:

$$
2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1} = \frac{4x^4 + 4x^2 + 4 - 16x^4 - 4x^2 - 1}{2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}}
$$

cette expression est donc du signe du numérateur car le dénominateur est toujours positif. Trouvons le signe du numérateur:

$$
\begin{aligned}
4x^4 + 4x^2 + 4 - 16x^4 - 4x^2 - 1 = -12x^4 + 3 \geq 0 &\iff 12x^4 \leq 3 \\
&\iff x^4 \leq 1/4 \\
&\iff -1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Donc f' est positive sur $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ et négative ailleurs, donc f est décroissante sur $]-\infty, -1/\sqrt{2}]$ puis croissante sur $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ puis décroissante sur $[1/\sqrt{2}, \infty[$.

(6) On écrit

$$
g(x) = (1 + x^2 + x^4)^{-1/2}
$$

On pose $l(x) = x^2 + x^4$. On a

$$
DL_4(0) : l(x) = x^2 + x^4 + o(x^4) \text{ (DL d'un polynôme)}
$$

De plus $l(0) = 0$ donc pour faire le DL de g en 0 on a besoin du **<u>DL en 0</u>** de la fonction $X \mapsto (1 + X)^{-1/2}$ puis on composera les DLs pour obtenir celui de g. On a

$$
DL_4(0) : (1 + X)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{X^2}{2!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{X^3}{3!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\frac{X^4}{4!} + o(X^4)
$$

Maintenant on compose les DLs, c'est-à-dire que l'on va remplacer X par $x^2 + x^4$ en supprimant les termes de degrés 5 ou plus, on obtient

$$
\begin{aligned}
DL_4(0) : g(x) &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(x^2 + x^4)^2}{2!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{(x^2 + x^4)^3}{3!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\frac{(x^2 + x^4)^4}{4!} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + x^4) + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

(7) G étant une primitive de g on "intègre" le DL de g pour obtenir celui de G, donc

$$
DL_5(0) : G(x) = G(0) + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5) \text{ car } G(0) = 0
$$

(8) On a $f(x) = G(2x) - G(x)$ donc on a

$$
DL_5(0) : f(x) = 2x - \frac{8x^3}{6} - \frac{32x^5}{40} - \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40}\right) + o(x^5) = x - \frac{7x^3}{6} - \frac{31x^5}{40} + o(x^5)
$$

(9) D'après le DL de f en 0 l'équation de la tangente de C_f à l'origine est $y = x$. De plus le premier terme non-nul du DL après l'équation de la tangente étant $-\frac{7x^3}{6}$, la courbe est au-dessus de la tangente à gauche de l'origine puis au-dessous de la tangente à droite de l'origine.

Problème. II. [9,5 points]

(1) Montrons tout d'abord que pour tout $P \in E$, $\varphi(P) \in E$. Soit donc $P \in E$, alors $\deg P \leq 2$ donc

$$\begin{cases} \deg P' \leq 1 \implies \deg(X+1)P' \leq 2 \implies (X+1)P' \in E \\ \deg P'' \leq 0 \implies \deg X^2P' \leq 2 \implies X^2P' \in E \end{cases}$$

donc $\varphi(P) = (X+1)P' - 2X^2P'' - P \in E$ car c'est une combinaison linéaire de polynômes de E.
Montrons maintenant que φ est linéaire: soit donc $\lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in E$ quelconques on a

$$\begin{aligned} \varphi(P+\lambda Q) &= (X+1)(P+\lambda Q)' - 2X^2(P+\lambda Q)'' - (P+\lambda Q) \\ &= (X+1)P' + \lambda(X+1)Q' - 2X^2P'' - \lambda 2X^2Q'' - 2X^2(P+\lambda Q)'' - P - \lambda Q \\ &= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire. Donc φ est un endomorphisme de E.

(2) On note la base canonique de E $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$. Alors on a

$$\begin{cases} \varphi(1) = -1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \\ \varphi(X) = (X+1) - X = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \\ \varphi(X^2) = (X+1)(2X) - 2X^2(2) - X^2 = -3X^2 + 2X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

donc

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A$$

(3) Le rang de A est le nombre maximum de vecteurs colonne libres. Or comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, les vecteurs colonnes de A sont liés, donc il y a au maximum 2 vecteurs colonnes libres donc $\operatorname{rang} A \leq 2$. Mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont libres donc il y a au moins 2 vecteurs colonnes libres donc $\operatorname{rang} A \geq 2$ donc finalement $\operatorname{rang} A = 2$.
De plus $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi$ donc $\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$ et donc on a

$$\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim E = 3 \implies \dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$$

(4) $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$ donc $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$ donc φ est non injective et donc non bijective. De plus $\dim \operatorname{Im}\varphi = 2 < \dim E$ donc $\operatorname{Im}\varphi \neq E$ donc φ est non surjective.

(5) $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$ donc pour trouver une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ il suffit de trouver un polynôme non-nul appartenant à $\operatorname{Ker}\varphi$. Or on a vu que $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(X) = -1$ donc $\varphi(X+1) = \varphi(X) + \varphi(1) = 1 - 1 = 0$ donc $X + 1 \in \operatorname{Ker}\varphi$ et donc $(X+1)$ est une base de $\operatorname{Ker}\varphi$. Donc

$$\operatorname{Ker}\varphi = \langle X+1 \rangle = \{aX + a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

(6) On sait que

$$\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2) \rangle = \langle -1, 1, 2X - 3X^2 \rangle = \langle 1, 2X - 3X^2 \rangle = \{-3aX^2 + 2aX + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Or $\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$ donc comme on a déjà montré que $(1, 2X - 3X^2)$ sont libres ils forment donc une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

(7) Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \times 1 + \mu Q_1 + \nu Q_2 = 0$ alors on a

$$\begin{aligned} \lambda + \mu(X+1) + \nu(-3X^2 + 2X - 1) = 0 &\implies -3\nu X^2 + (\mu + 2\nu)X + \lambda - \nu + \mu = 0 \\ &\implies \begin{cases} -3\nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda - \nu + \mu = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \nu = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $(1, Q_1, Q_2)$ est une famille libre de E donc une base de E car $\dim E = 3$.

(8) On note $\mathcal{B} = (1, Q_1, Q_2)$. On calcule

$$\begin{cases} \varphi(1) = -1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ \varphi(Q_1) = \varphi(X+1) = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ \varphi(Q_2) = \varphi(-3X^2+2X-1) = (X+1)(-6X+2) - 2X^2 \times (-6) - (-3X^2+2X-1) = -9X^2 - 6X + 3 = -3Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

et donc on obtient la matrice $B = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(9) La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ est formée des vecteurs colonne des coordonnées dans $\mathcal{C}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(10) On calcule l'inverse par la méthode de Gauss et on trouve

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

(11) B est une matrice diagonale donc pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

(12) On a la relation suivante entre A et B

$$A = MBM^{-1}$$

Donc on a (attention le produit de matrices n'est pas commutatif, mais il est associatif!)

$$A^2 = (MBM^{-1}) \times (MBM^{-1}) = MB(M^{-1}M)BM^{-1} = MBI_3BM^{-1} = MBBM^{-1} = MB^2M^{-1}$$

où on a noté I_3 la matrice identité 3x3. De même on a

$$A^n = MBM^{-1}MBM^{-1} \dots MBM^{-1}MBM^{-1} = MBIBIB \dots IBM^{-1} = MB^nM^{-1}$$

donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$