Université des Antilles et de la Guyane

Département Scientifique Interfacultaire, Martinique

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

*DEUG MIAS 1e année * Mathématiques 1 * année 2005–2006*

Travaux dirigés * Série 8

Exercice 1. Donnez le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \arctan x$ *b)* $g(x) = \ln \left| \dfrac{x^2+1}{x^4+1} \right|$

c) $h(x) = e^{x^2+x}$ *d)* $k(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

Exercice 2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\sqrt{x}$. Etudier la dérivabilité de f.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2\,x + e^x$.
Montrer que f est une bijection. On notera g la bijection réciproque de f.
Montrer que g est deux fois dérivable et calculer $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$.

Exercice 4. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue ; on suppose que f est dérivable en 0 et en 1, et que

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0 = f'(1)$$

On se propose de montrer qu'il existe $\alpha \in \,]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
On considère la fonction $g :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

(a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et en 1, en une fonction $\tilde{g}$, continue sur $[0, 1]$, que l'on précisera.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \,]0, 1[$ tel que $\tilde{g}(\alpha) = 0$.

(c) En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 5. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, $a < b$, et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On suppose $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in \,]a, b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et

$$f(c_2) = 0 \ , \ f'(c_1) = f'(c_3) = 0 \ .$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application qui vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \ . \qquad (*)$$

(a) Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et expliciter la dérivée f'. (Utiliser la définition du nombre dérivé.)

(c) Trouver toutes les applications f vérifiant la propriété $(*)$.

Exercice 7. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Exercice 8. (a) Enoncer le théorème des accroissements finis.

(b) Rappeler le domaine de définition de la fonction arcsin ainsi que l'expression de sa fonction dérivée.

(c) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin 2x - \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Exercice 9. Calculez les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3/6 + x/3 + 1/3$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que (u_n) est croissante. Montrer que $f(3/4) < 3/4$ et en déduire que $u_n < 3/4$ pour tout n.

(b) Montrer que (u_n) converge. Soit l sa limite, montrer que $l = f(l)$ et que $0 \leq l \leq 3/4$.

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_{n+1} \leq (2/3)(l - u_n)$$

En déduire l'encadrement $0 \leq l - u_n \leq (2/3)^n$. Comment peut-on choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de l à 10^{-2} près ?