Université des Antilles et de la Guyane
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
Département Scientifique Interfacultaire, Martinique

DEUG MIAS 1^e année * Mathématiques 1 * année 2005–2006

Travaux dirigés — Série 7

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, \ell \in \mathbb{R}$. Ecrire :

- (a) f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a .
- (b) f ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers a .
- (c) f ne tend pas vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- (d) f n'a pas de limite au point a .

Exercice 2. Avec les hypothèses suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$,
- $\forall \varepsilon > 0, (|x| < 2\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon)$,
- $\forall \varepsilon > 0, (|x| < \varepsilon^2 \Rightarrow |g(x) - 3| < \varepsilon)$,

déterminer un nombre $\eta > 0$ tel que : $|x| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{10}$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^3 - x + 1}}{-3x^{3/2} + x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^3 + 2x - 1}}{-2x^5 + x^4 + 3x - 1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 4}$; $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x - 4}{\sin x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(2x)}{E(x)}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} E\left(\frac{1}{x}\right)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x + \sqrt{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$; $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - 1}$

Exercice 4. Discuter suivant les paramètres a, b, c, m , l'existence et la valeurs des limites :

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + mx\sqrt{x + 2})$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + mx)$.

Exercice 5. Prolongez par continuité, si possible, les fonctions (donnez le domaine de définition dans l'intervalle donné)

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 4} \text{ pour } x \in]0, +\infty[; \quad g(x) = \frac{x - 4}{\sin x} \text{ pour } x \in]\pi, 5]$$
$$h(x) = \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - 1} \text{ pour } x \in]0, +\infty[$$

[cf. exercice 3]

Exercice 6. soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin x$.

$f(x)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 7. Peut-on prolonger la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|/x$ en 0 ?

Exercice 8. Montrez que la fonction $f(x) = x E(1/x)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut se prolonger par continuité en 0. Est-elle continue en 1 ?

Exercice 9. En utilisant la définition de la continuité, montrer que les fonctions suivantes sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

$$i) f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad ii) f(x) = \cos x .$$

(On montrera que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.)

Exercice 10. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$d(x, A) = \inf\{|x - y| ; y \in A\} .$$

(a) Déterminer $d(x, A)$ quand A est l'une des parties suivantes :

$$[-2, 3] ; [1, 2] \cup [3, 5] ; \mathbb{Z} ; \mathbb{Q} .$$

(b) Montrer que $|d(x, A) - d(x', A)| \leq |x - x'|$. En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Donner une caractérisation de $\{x \in \mathbb{R} \mid d(x, A) = 0\}$.

Exercice 11. Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$. Etudier la géométrie du graphe de f .

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x - \cos(x/n)$.

(a) Montrez que f_n est strictement croissante ; en déduire qu'il existe un unique réel x_n tel que $x_n = \cos(x_n/n)$. Montrez que $x_n \in]0, 1[$.

(b) Montrez que pour tout $x \in]0, 1[$ on a $f_n(x) > f_{n+1}(x)$; en déduire que la suite (x_n) est strictement croissante (utilisez aussi la croissance des f_n).

(c) Montrez que (x_n) converge vers 1.

Exercice 13. Montrez que

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$