Université des Antilles et de la Guyane **DEUG MIAS/MASS**
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles **année 2005–2006**
Département Scientifique Interfacultaire, Martinique **Module M1**

Travaux dirigés, série 6.

Exercice 1. a) Ecrire sous la forme $a + i\,b$, avec a et b réels, les nombres

$$\frac{3+6\,i}{3-4\,i}\ ,\quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6\,i}{3-4\,i}\ ,\quad \frac{2+5\,i}{1-i} + \frac{2-5\,i}{1+i}\ ,\quad \frac{3+4\,i}{1+2\,i} + \frac{2-i}{1+i}\ .$$

b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un réel r strictement négatif ?

Exercice 2. Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que z, $1+z$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(3-2\,i)\,z - \bar{z} = -i$, **b)** $z\bar{z} + 2\,(z-\bar{z}) = 4 - 8i$,

c) $z^2 + z + 1 = 0$, **d)** $z^2 = 2 + 3\,i$,

e) $z^2 - (1+2\,i)\,z + 2i = 0$, **f)** $(1+i)\,z^2 + (5+4\,i)\,z + 3 + i = 0$.

Exercice 4. a) Démontrer par recurrence la formule de Moivre,
$\forall n \in \mathbb{N} : (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

b) Calculer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ à l'aide de cette formule.

c) Démontrer les identités (i) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$,

(ii) $\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1 \quad (\theta \notin \pi\mathbb{Z})$.

d) Calculer $(1+i)^7$, $(1+i)^n + (1-i)^n$, $(1+i)^n - (1-i)^n$.

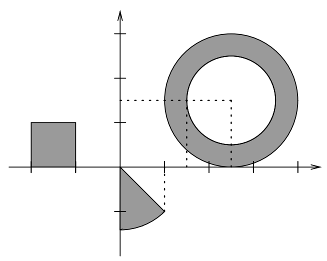
Exercice 5. a) Exprimer en fonction de $\arg z$: $\arg(\bar{z})$; $\arg(-z)$; $\arg(\frac{1}{z})$; $\arg(iz)$; $\arg(-iz)$.

b) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$1+i\ ;\quad \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\ ;\quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\ ;\quad (\sqrt{3}-i)^6\ ;\quad \frac{e^{ix}}{1+e^{ix}},\ x \notin \pi\mathbb{Z}\ .$$

Exercice 6. a) Pour $Z_1 = \sqrt{3} + i$ et $Z_2 = 1 - i$, trouver la forme trigonométrique de $Z_1, Z_2, Z_1 \cdot Z_2$ et $\frac{Z_1}{Z_2}$. En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

b) Ecrire les racines carrées de $Z = 1 + i$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.



Exercice 7. Caractériser les nombres complexes appartenant aux ensembles représentés ci-contre.

Exercice 8. a) Soient M, P et Q trois points du plan. Donner à l'aide de vecteurs une condition nécessaire et suffisante pour que M, P, Q soient alignés.

b) Soit z l'affixe de M. On associe à P l'affixe i et à Q l'affixe iz. Déterminer à l'aide de nombres complexes l'ensemble des points M tels que M, P, Q soient alignés.

Exercice 9. On pose $Z = \dfrac{z+i}{2-i\,z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{i}{2}\}$. Soient M, M' et A les points d'affixe z, Z et i. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que
a) $Z \in \mathbb{R}$; **b)** $\arg Z = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$; **c)** A, M, M' sont alignés ; **d)** $M = M'$;
e) $Z + 1 \in \mathbb{R}_+$; **f)** M' appartient au cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 10. Soit $\mathbb{U}$ le cercle trigonométrique, ABC un triangle équilatéral inscrit dans $\mathbb{U}$, Δ une droite passant par O, et H, K, L les projections orthogonales respectives de A, B, C sur Δ. Montrer que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 11. On considère l'équation (E) : $(z-j)^6 - (z-j^2)^6 = 0$, avec $j = e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$.
Résoudre (E) en montrant que (E) $\iff$ $\dfrac{z-j}{z-j^2} = w$ avec $w^6 = 1,\ w \neq 1$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on a :
a) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$; interprétation géométrique ?
b) si $\arg(a)$-$\arg(b)$=$\pi/2$ $[2\pi]$, alors $|a+b| = |a-b|$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a) $\left\{ \begin{array}{rcl} \arg(z) & = & \arg(z+2i)\ [2\pi] \\ |z| & = & |z+2| \end{array} \right.$
b) $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$;
c) $(1+\sqrt{3})z^4 = 1 - i$;
d) $z^n = (z-1)^n$;
e) $z^8 - (2+2\,i)\,z^4 + 4i = 0$.

Exercice 14. **a)** Montrer que $P(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ admet une racine réelle, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
b) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(z) = z^4 + z^3 + a\,z^2 + b\,z + 10$ vérifie $P(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$. (Ind. : considérer $j^2 = e^{4i\pi/3}$, racine cubique de l'unité.)

Exercice 15. Linéariser les expressions suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$A(x) = \cos^3 x$; $\quad B(x) = \sin x \cos^3 x$; $\quad C(x) = \cos^3(2x)\,\sin^2(3x)$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$.
En déduire la valeur $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1}$ lorsque ζ est une racine n–ième de l'unité ?

Exercice 17. Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c ; montrer que le triangle ABC est équilatéral direct ssi $a + j\,b + j^2\,c = 0$ où $j = \exp(i\,\frac{2\pi}{3})$.

Exercice 18. Soit $p \in \mathbb{R}$; résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^3 = (p+1)^3$. Comment les images des solutions sont-elles disposées ? (Utiliser l'exercice précédent).

Exercice 19. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; calculer

$$\textbf{a)} \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)\ ;\ \textbf{b)} \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)\ ;\ \textbf{c)}\ \sum_{k=0}^{n} \cos^k x \cos kx\ ;\ \textbf{d)}\ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^p \sin kx\ .$$

Exercice 20. Résoudre les équations

a) $(\bar{z})^p = z^n,\ n, p \in \mathbb{N}^*$; $\qquad$ **b)** $1 + \dfrac{z+i}{z-i} + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$.